ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และการจำลองระบบพหุซับซ้อน
Mathematical Model and Simulation for Multiple Complex Systems

ดร.ณัฐไชย์ ลีนาวงศ์
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
E-mail: klchartc@kmitl.ac.th

สุธิตา มณีชัย
อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา
E-mail: m__sutitar@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้นำเสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับอธิบายปัญหาระบบพหุซับซ้อนแบบเป้าหมายร่วม ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาในหลากหลายสาขาวิชา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องระบบการทำงานขององค์กรทางด้านธุรกิจที่ต้องการให้เกิดประสิทธิภาพและประสิทธิผล โดยจะใช้ความรู้ทางด้านการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัดในการวิเคราะห์ลักษณะปัญหาของตัวแบบ อันจะเป็นแนวทางในการจัดการกับปัญหา NP-*Complete* นี้ นอกจากนี้ งานวิจัยนี้จะทำการจำลองปัญหาด้วยคอมพิวเตอร์ เพื่อทำการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบและเพื่อศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบ

คำสำคัญ: ระบบพหุซับซ้อน การหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัด ปัญหา NP-*Complete*

Abstract

This research proposes a mathematical model for studying multiple complex systems with a common goal. It can be applied to problems in various areas of study, especially, in business organizations that long for efficiency and effectiveness. The combinatorial optimization methodology is used to analyze the problem and the behavior of these complex systems, which will also be a way to handle this NP-*Complete* problem. In addition, the problem will be computer simulated in order to examine the results on the system performance and the factors affecting those results.

Keywords: Multiple Complex Systems, Combinatorial Optimization, NP-*Complete* Problem

บทนำ

ระบบที่มักพบในงานทางด้านวิทยาศาสตร์และธุรกิจ หลายๆ ระบบมีลักษณะเป็นระบบซับซ้อน อันเนื่องมาจากสมาชิกภายในระบบมีผลกระทบต่อกันและส่งผลไปยังประสิทธิผลของระบบนั้นๆ ตัวอย่างของระบบซับซ้อนที่เห็นได้ชัดเจน เช่น ระบบความสัมพันธ์ของยีนภายในโครโมโซม ระบบสปินกลาส และพฤติกรรมองค์กรทางด้านธุรกิจ เป็นต้น ระบบเหล่านี้สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า ตัวแบบ *NK* (Derrida, 1981; Kauffman, 1993; Levinthal, 1997; Westhoff, Yarbrough, and Yarbrough, 1996)

ตัวแบบ *NK* เป็นตัวแบบที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกที่อยู่บน K+1 ตำแหน่ง (K เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq K \leq N - 1$ เมื่อ N คือขนาดของระบบ) ถ้า $K = 0$ แสดงว่า สมาชิกทุกตำแหน่งในระบบเป็นอิสระต่อกัน ประสิทธิผลของระบบ (System Performance) ขึ้นอยู่กับเฉพาะสมาชิกในตำแหน่งนั้นๆ และถ้า $K = N - 1$ แสดงว่าสมาชิกในทุกๆ ตำแหน่งของระบบมีความสัมพันธ์กันหมด ดังนั้น K จึงเปรียบเสมือนปัจจัยภายในที่ส่งผลต่อค่าประสิทธิผลของสมาชิกภายในระบบซึ่งค่าประสิทธิผลดังกล่าว เรียกว่า ค่าประสิทธิผลประกอบ (Contribution to Performance)

ในตัวแบบ *NK* ของ Kauffman กำหนดให้ระบบหนึ่งๆ แทนด้วยเวกเตอร์ทวิภาค N เวกเตอร์ ถ้า $\mathbf{x}$ คือ ระบบที่เป็นไปได้ในตัวแบบ ค่าประสิทธิผลของระบบ $\mathbf{x}$ ถูกกำหนดให้เป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลประกอบทั้งหมด ดังสมการ

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x}_i^K)}{N} \qquad (1)$$

เมื่อ $f_i(\mathbf{x}_i^K)$ คือ ค่าประสิทธิผลประกอบของระบบ $\mathbf{x}$ ซึ่งเป็นค่าที่แสดงประสิทธิภาพของสมาชิกตัวที่ i ภายในระบบ $\mathbf{x}$ โดยสมาชิกดังกล่าวมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในตำแหน่งอื่นๆ อีก K ตัว Kauffman กำหนดให้ค่าประสิทธิผลประกอบเป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง [0,1] โดยสัมพันธ์กับการจัดหมู่ของสมาชิกจำนวน K+1 ตัว

จากลักษณะของตัวแบบ *NK* พบว่า ตัวแบบ

ดังกล่าวเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัด (Combinatorial Optimization Problem: COP) ซึ่งประกอบด้วยเซตของส่วนประกอบ 5 ส่วน คือ

1. เซ็ตข้อมูล (Set of Data) = {N, K, $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_N)$ เมื่อ x_i = 0 หรือ 1}

2. เซ็ตของผลเฉลยที่เป็นไปได้ (Set of Feasible Solution) = {$\mathbf{x}$ | $\mathbf{x}$ คือ ระบบที่เป็นไปได้}

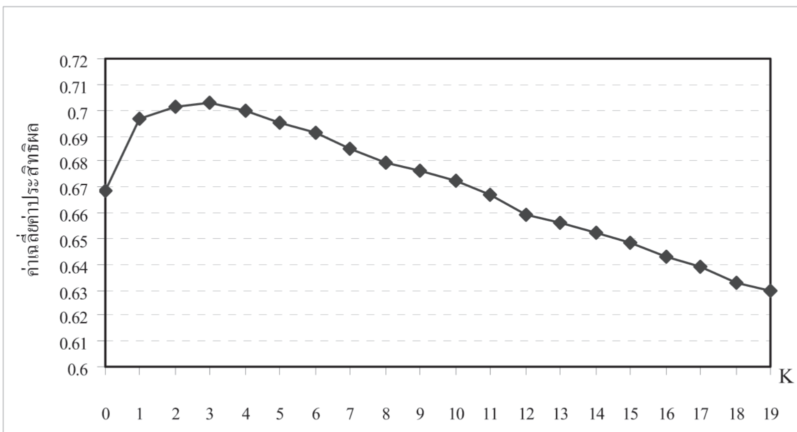
3. เซ็ตของบล็อกโครงสร้าง (Set of Building Block) = {x_i | i = 1, 2,..., N}

4. ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective Function Value): $Z(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$

5. จุดประสงค์โดยรวม (Overall Objective): เพื่อหา $\mathbf{x}^{**}$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^{**})$ มีค่ามากที่สุด

Kauffman ใช้กระบวนการแทนที่หนึ่งตำแหน่ง (The One-Replacement Process) ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีฮิวริสติคที่เริ่มต้นจากระบบตั้งต้น (Initial System) แล้วไต่ไปตามระบบย่านใกล้เคียง (Neighbor) ที่มีสมาชิกแตกต่างจากระบบตั้งต้นเพียงหนึ่งตำแหน่ง (One-Replacement Neighbor) และมีค่าประสิทธิผลสูงกว่าระบบตั้งต้นนั้น

จากการวิเคราะห์ค่าของ *N* และ *K* ในตัวแบบ *NK* พบว่า กรณี *K* = 0 ค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ (Global Optimal Solution) มีค่าเป็น 2/3 และค่าคาดหวังของจำนวนการแทนที่ทั้งหมดมีค่าเป็น *N*/2 ครั้ง ส่วนกรณี *K* = *N*-1 พบว่าเมื่อ N มีค่ามาก ค่าคาดหวังของค่าประสิทธิผลของระบบที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ (Local Optimal Solution) มีค่าเท่ากับ 2/3 ถ้าพิจารณากราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลดังกล่าวกับจำนวน *K* ที่แตกต่างกันจะพบว่า เส้นกราฟจะเริ่มต้น (*K* = 0) จะมีค่าประสิทธิผลประมาณ 2/3 จากนั้นค่าประสิทธิผลจะเพิ่มสูงขึ้นในขณะที่ *K* น้อยๆ จนมีค่าสูงที่สุดแล้วจะค่อยๆ ลดต่ำลงเข้าจนมีค่าเข้าใกล้ 1/2 ดังรูปที่ 1 การเพิ่มขึ้นและลดลงของกราฟในลักษณะนี้เรียกว่า *ความวิบัติซับซ้อน* (Complexity Catastrophe)



รูปที่ 1 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลของระบบซับซ้อนขนาด *N* = 20 ที่ *K* แตกต่างกัน ด้วยการจำลองทางคอมพิวเตอร์เป็นจำนวน 500 ครั้ง

ในปี ค.ศ. 1999 Solow และคณะ (Solow, et al., 1999) ได้เสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อลดความวิบัติซับซ้อนของตัวแบบ *NK* เช่น ตัวแบบ *NK/W* เป็นตัวแบบที่กำหนดให้ค่าประสิทธิผลของระบบเป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลประกอบที่มีการถ่วงน้ำหนัก ตัวแบบ *NK/N* (μ,σ) เป็นตัวแบบที่กำหนดให้ค่าประสิทธิผลประกอบเป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติที่มีค่ากลาง μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ตัวแบบ *NK/A* เป็นตัวแบบที่กำหนดให้ในแต่ละส่วนของระบบมีสมาชิกที่เป็นไปได้ *A* แบบ เป็นต้น ผลปรากฏว่ามีเพียงตัวแบบ *NK/W* เท่านั้นที่สามารถขจัดความวิบัติซับซ้อนได้ ส่วนตัวแบบอื่นๆ แม้จะไม่สามารถขจัดความวิบัติซับซ้อนได้ แต่ค่าประสิทธิผลที่ได้จากตัวแบบดังกล่าวมีค่าสูงขึ้นตามตัวแปรควบคุมที่ตัวแบบนั้นๆ กำหนดไว้

ในปี ค.ศ. 2002 Solow และคณะได้วิเคราะห์คุณลักษณะของตัวแบบ *NK* ของ Kauffman พบว่าตัวแบบ *NK* เป็นปัญหาหนึ่งใน NP-*complete* ซึ่งเป็นปัญหาที่ไม่มีขั้นตอนวิธีที่มีเวลาเป็นพหุนามเพื่อหาผลเฉลยนั่นเอง (Chartchai Leenawong and Ponrudee Netisopakul, 2004; Solow, et al., 2002)

อย่างไรก็ตาม ในปี ค.ศ.1991 Kauffman และ Johnsen ได้เสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนามาจากตัวแบบ *NK* เพื่ออธิบายความสามารถในการดำรงพันธุ์ของเหยื่อและผู้ล่าในระบบนิเวศ ซึ่งความสัมพันธ์ของเหยื่อกับผู้ล่านั้นเป็นระบบพหุซับซ้อนแบบต่างเป้าหมาย (Multiple Complex Systems with Different Goals) นั่นคือ ความสัมพันธ์ภายในเหยื่อเป็นระบบซับซ้อนที่สนับสนุนการดำรงพันธุ์ทั้งของเหยื่อและผู้ล่า ในขณะที่ความสัมพันธ์ภายในผู้ล่าเป็นระบบซับซ้อนที่สนับสนุนการดำรงพันธุ์ของผู้ล่าแต่ทำลายการดำรงพันธุ์ของเหยื่อ ซึ่งตัวแบบดังกล่าวสามารถยืนยันได้ว่า ในขณะที่เหยื่อมีจำนวนน้อย ผู้ล่าต้องมีจำนวนน้อยด้วย จึงจะทำให้ความสามารถในการดำรงพันธุ์ของทั้งสองดีที่สุด ในทางกลับกัน ถ้าผู้ล่ามีจำนวนมาก เหยื่อก็จะต้องมีจำนวนมากด้วยเช่นกัน ถ้าเหยื่อมีจำนวนมาก ในขณะที่ผู้ล่ามีจำนวนน้อย อาจก่อให้เกิดภาวะจำนวนเหยื่อมากเกินไปทำให้เสียสมดุลของระบบนิเวศ แต่ถ้ามีผู้ล่าจำนวนมาก ในขณะที่เหยื่อมีจำนวนน้อย ก็อาจก่อให้เกิดภาวะการสูญพันธุ์ทั้งของเหยื่อและผู้ล่าได้

บทความวิจัยนี้เป็นการเสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนามาจากตัวแบบ *NK* เพื่อใช้อธิบายระบบพหุซับซ้อนแบบเป้าหมายร่วม (Multiple Complex Systems with a Common Goal) ซึ่งหมายถึง ระบบพหุซับซ้อนที่ประกอบด้วยระบบซับซ้อนที่ทุกๆ ระบบมีจุดมุ่งหมายเพื่อต้องการให้ค่าประสิทธิผลของระบบโดยรวมดีที่สุด ตัวอย่างของระบบพหุซับซ้อนในลักษณะนี้ เช่น ระบบการทำงานขององค์กรที่มีหลายแผนก โดยองค์กรใหญ่คือ ระบบพหุซับซ้อน และแต่ละแผนกในองค์กรเป็นระบบซับซ้อน งานวิจัยนี้จะแสดงการวิเคราะห์คุณลักษณะของตัวแบบดังกล่าวโดยใช้การวิเคราะห์เชิงการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัด และใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์เพื่อศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อประสิทธิผลของระบบ และเพื่อวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบ รวมทั้งหาขั้นตอนวิธีเพื่อหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของตัวแบบด้วย

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบพหุซับซ้อนแบบเป้าหมายเดียว

เนื่องจากตัวแบบ *NK* เป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับอธิบายระบบซับซ้อนซึ่งสนใจเฉพาะความสัมพันธ์ของสมาชิกภายในระบบ (Chartchai Leenawong, 2003) เท่านั้น แต่ตัวแบบนี้ไม่สามารถใช้อธิบายระบบพหุซับซ้อนซึ่งเป็นระบบที่สมาชิกภายในระบบมีความสัมพันธ์กับสมาชิกทั้งภายในและภายนอกระบบได้ ดังนั้นบทความวิจัยนี้จึงได้เสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สามารถใช้อธิบายระบบดังกล่าวได้ โดยระบบพหุซับซ้อนในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็นระบบที่ประกอบด้วยระบบซับซ้อน 2 ระบบซึ่งเรียกว่าระบบย่อยที่ 1 และระบบย่อยที่ 2 สมาชิกของระบบย่อยหนึ่งมีผลกระทบต่อสมาชิกของอีกระบบหนึ่ง และการกระทบดังกล่าวส่งผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนนั้น ตัวแบบที่สร้างขึ้นในงานวิจัยนี้ได้พัฒนามาจากตัวแบบ *NK* ของ Kauffman ซึ่งให้ชื่อว่า ตัวแบบ *NKC*

ลักษณะของตัวแบบ *NKC*

ตัวแบบ *NKC* เป็นตัวแบบที่สร้างขึ้นเพื่อมุ่งเน้นค้นหาระบบย่อยที่ 1 และระบบย่อยที่ 2 ซึ่งประกอบขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อนที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงสุด และกำหนดให้แต่ละระบบย่อยแทนด้วยเวกเตอร์ทวิภาค *N* เวกเตอร์ (Binary *N*-Vector)

ถ้าให้ $\mathbf{x}$ คือ ระบบย่อยที่ 1 และ $\mathbf{y}$ คือ ระบบย่อยที่ 2 ค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อน $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ แทนด้วยสมการ 2.1

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}^K,\mathbf{y}^C) + f(\mathbf{y}^K,\mathbf{x}^C)}{2} \qquad (2.1)$$

เมื่อ $f(\mathbf{x}^K, \mathbf{y}^C)$ คือ ค่าประสิทธิผลของระบบ $\mathbf{x}$ (ที่ถูกกระทบด้วยระบบ $\mathbf{y}$)

$f(\mathbf{y}^K, \mathbf{x}^C)$ คือ ค่าประสิทธิผลของระบบ $\mathbf{y}$ (ที่ถูกกระทบด้วยระบบ $\mathbf{x}$)

$f(\mathbf{y}^K, \mathbf{x}^C)$ และ $f(\mathbf{y}^K, \mathbf{x}^C)$ กำหนดให้เป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลประกอบทั้งหมด ดังสมการ 2.2 และ 2.3

$$f(\mathbf{x}^K,\mathbf{y}^C) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i^K, y_i^C)}{N} \qquad (2.2)$$

$$f(\mathbf{y}^K,\mathbf{x}^C) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(y_i^K, x_i^C)}{N} \qquad (2.3)$$

เมื่อ $f_i(x_i^K, y_i^C)$ คือ ค่าประสิทธิผลประกอบที่ i ของระบบ $\mathbf{x}$ ซึ่งหมายถึง ค่าประสิทธิผลของสมาชิกตัวที่ i ในระบบ $\mathbf{x}$ ที่ถูกกระทบด้วยสมาชิก *K* ตัวจากระบบ $\mathbf{x}$ และ *C* ตัวจากระบบ $\mathbf{y}$

$f_i(y_i^K, x_i^C)$ คือ ค่าประสิทธิผลประกอบที่ i ของระบบ $\mathbf{y}$ ซึ่งหมายถึง ค่าประสิทธิผลของสมาชิกตัวที่ i ในระบบ $\mathbf{y}$ ที่ถูกกระทบด้วยสมาชิก *K* ตัวจากระบบ $\mathbf{y}$ และ *C* ตัวจากระบบ $\mathbf{x}$

ค่าประสิทธิผลประกอบทั้งหมดในตัวแบบ *NKC* กำหนดให้เป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง [0,1] ซึ่งสัมพันธ์กับการจัดหมู่ของสมาชิกจำนวน *K*+*C*+1 ตัว

จากที่กล่าวมา เราสามารถแสดงได้ว่า ตัวแบบ *NKC* เป็น COP ซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้

1. เซ็ตข้อมูล = $\{2N, K, C, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N), y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ เมื่อ $x_i, y_j = 0$ หรือ 1 และ $i, j = 1, 2, \ldots, N\}$

2. เซ็ตของผลเฉลยที่เป็นไปได้ = $\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x},\mathbf{y}$ คือ ระบบย่อยที่ 1 และระบบย่อยที่ 2 ตามลำดับ$\}$

3. เซ็ตของบล็อกโครงสร้าง = $\{x_i, y_j \mid i, j = 1, 2,..., N\}$

4. ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์: $Z(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$

5. จุดประสงค์โดยรวม: "หา $\mathbf{x}^*$ และ $\mathbf{y}^*$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ มีค่ามากที่สุด"

ตัวแบบ *NKC* เป็นปัญหา NP-*complete*

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ $\mathbf{A} = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ โดยที่ $a_i \geq 0$ สำหรับทุก i = 1, 2,..., n สำหรับจำนวนจริง $d \geq 0$ แล้ว $\max(d\mathbf{A}) = d(\max \mathbf{A})$

พิสูจน์

ให้ $a_j \in \mathbf{A}$ และ $a_j = \max \mathbf{A}$ สำหรับบาง j = 1, 2,..., n

ดังนั้น $da_j = d(\max \mathbf{A}) = \max(d\mathbf{A})$ (จาก $d \geq 0$)

บทตั้ง 2.2 กำหนดให้ $\mathbf{A} = \{a_1, a_2,..., a_n\}$ โดยที่ $a_i \geq 0$ สำหรับทุก i = 1, 2,..., n และ $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ โดยที่ $b_j \geq 0$ สำหรับทุก j = 1, 2,..., m ถ้า $\mathbf{A+B} = \{a_i + b_j\}$ สำหรับทุก i = 1, 2,..., n และทุก j = 1, 2,..., m แล้ว $\max(\mathbf{A+B}) = \max \mathbf{A} + \max \mathbf{B}$

พิสูจน์

ให้ $a_p \in \mathbf{A}$ และ $a_p = \max \mathbf{A}$
สำหรับบาง p = 1, 2,..., n
และ $b_q \in \mathbf{B}$ และ $b_q = \max \mathbf{B}$
สำหรับบาง q = 1, 2,..., n
ดังนั้น $a_p + b_q = \max \mathbf{A} + \max \mathbf{B}$ (2.1)
และ $a_p + b_q > a_i + b_j$
สำหรับทุก $i \neq p$ และ $j \neq q$
เนื่องจาก $a_p + b_q \in \mathbf{A+B}$
ดังนั้น $a_p + b_q = \max(\mathbf{A+B})$ (2.2)

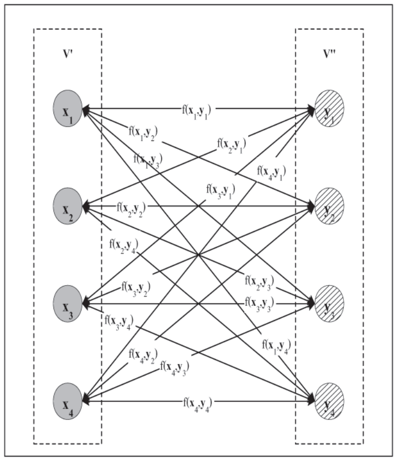
จาก (2.1) และ (2.2) ทำให้สรุปได้ว่า $\max(\mathbf{A+B}) = \max \mathbf{A} + \max \mathbf{B}$

ทฤษฎีบท 2.1 ตัวแบบ *NKC* เป็นปัญหาใน NP-*complete*

พิสูจน์ การพิสูจน์แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 แสดงว่าตัวแบบ *NKC* เป็นปัญหาใน NP

ตัวแบบ *NKC* สามารถแทนได้ด้วยกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) $\mathbf{G} = (V,E)$ ซึ่ง $V = V' \cup V''$ เมื่อสมาชิกใน V' คือระบบย่อยที่ 1 ที่เป็นไปได้ในตัวแบบ ($|V'| = 2^N$) และสมาชิกใน V'' คือ ระบบย่อยที่ 2 ที่เป็นไปได้ในตัวแบบ ($|V'| = 2^N$) ส่วนสมาชิกใน E คือ เส้นเชื่อมระบบพหุซับซ้อนที่เป็นไปได้ทั้งหมด ($|E| = 2^{2N}$) โดยมีค่ากำกับ (Cost) ในแต่ละเส้นเป็นค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่สัมพันธ์กับเส้นเชื่อมนั้นๆ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2

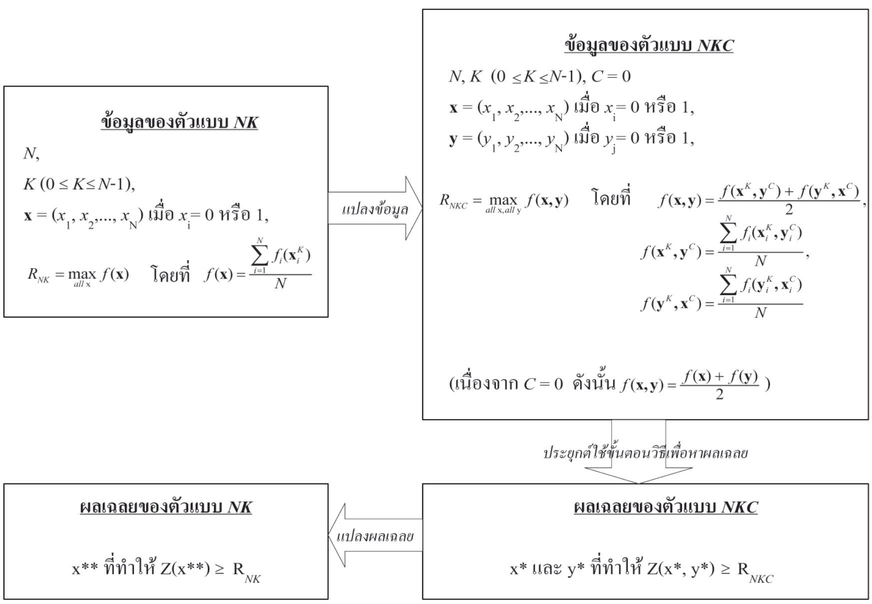


รูปที่ 2 ตัวอย่างของตัวแบบ *NKC* ในรูปของกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์

กำหนดให้จำนวนจริง $R_{NKC} = \max_{all\,\mathbf{x}, all\,\mathbf{y}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ เป็นสมาชิกที่เพิ่มเข้าไปในเซตข้อมูลของตัวแบบ *NKC* เพื่อทำให้ ตัวแบบ *NKC* เป็น COP ที่อยู่ในรูปปัญหาการตัดสินใจ (Decision Problem) ขั้นตอนวิธีที่ใช้ในการตรวจสอบว่า $f(x,y) \geq R_{NKC}$ มีอันดับของฟังก์ชันความซับซ้อนซับเวลา (Time Complexity Function) เป็น $O(n^2)$ เมื่อ n คือ จำนวนระบบย่อยที่ 1 และระบบย่อยที่ 2 ทั้งหมดในตัวแบบ ซึ่งจะเห็นได้ว่าความซับซ้อนเชิงเวลาของขั้นตอนวิธีดังกล่าวเป็นพหุนาม (Polynomial) ดังนั้น ตัวแบบ *NKC* จึงเป็นปัญหา NP

ตอนที่ 2 แสดงว่าตัวแบบ *NKC* เป็น NP-*hard*

การแสดงว่า ตัวแบบ *NKC* เป็น NP-*hard* สามารถแสดงได้โดยอาศัยขั้นตอนวิธีการลดทอนจากตัวแบบ *NK* ไปยังตัวแบบ *NKC* ซึ่งมีลักษณะการลดทอนดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ขั้นตอนวิธีการลดทอนปัญหาจากตัวแบบ *NK* ไปสู่ตัวแบบ *NKC*

ต่อไปนี้จะแสดงเพื่อยืนยันว่า ตัวแบบ *NKC* ดังรูปที่ 3 จะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อ ตัวแบบ *NK* มีผลเฉลย นั่นคือ ต้องการแสดงว่า มี $\mathbf{x}^*$ และ $\mathbf{y}^*$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \geq R_{NKC}$ ก็ต่อเมื่อ มี $\mathbf{x}^{**}$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^*) \geq R_{NK}$

เริ่มต้นจากการสมมติให้ มี $\mathbf{x}^*$ และ $\mathbf{y}^*$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \geq R_{NKC}$ ดังนั้น มี $\mathbf{x}^*$ และ $\mathbf{y}^*$ ที่ทำให้

$$f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \geq \max_{all\,x,all\,y} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{all\,x,all\,y} \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}{2}$$

$$\frac{f(\mathbf{x}^{*K},\mathbf{y}^{*C})+f(\mathbf{y}^{*K},\mathbf{x}^{*C})}{2} \geq \max_{all\,x,all\,y} \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}{2}$$

$$\frac{f(\mathbf{x}^*)+f(\mathbf{y}^*)}{2} \geq \max_{all\,x,all\,y} \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}{2} \quad \text{(จาก C = 0)}$$

$$\geq \frac{\max_{all\,x,all\,y} \{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\}}{2} \quad \text{(จากบทตั้ง 2.1)}$$

$$f(\mathbf{x}^*)+f(\mathbf{y}^*) \geq \max_{all\,x,all\,y} \{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\}$$

$$= \max_{all\,x} f(\mathbf{x}) + \max_{all\,y} f(\mathbf{y}) \quad \text{(จากบทตั้ง 2.2)}$$

$$f(\mathbf{x}^*) \geq \max_{all\,x} f(\mathbf{x}) + \max_{all\,y} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}^*)$$

$$\geq \max_{all\,x} f(\mathbf{x}) + \max_{all\,y} f(\mathbf{y}) - \max_{all\,y} f(\mathbf{y})$$

ดังนั้น

$$f(\mathbf{x}^*) \geq \max_{all\,x} f(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

ให้ $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{x}^*$ จากอสมการ (2.3) จะได้

$f(\mathbf{x}^{**}) > \max_{all\,\mathbf{x},all\,\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$ นั่นคือ $Z(\mathbf{x}^{**}) \geq R_{NK}$

จากนั้นสมมติให้ มี $\mathbf{x}^{**}$ ที่ทำให้ $Z(\mathbf{x}^{**}) \geq R_{NK}$ ดังนั้น มี $\mathbf{x}^{**}$ ที่ทำให้ $f(\mathbf{x}^{**}) \geq \max_{all\,x} f(\mathbf{x})$ ให้ $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**}$ และ $\mathbf{y}^*$ ซึ่ง $f(\mathbf{y}^*) = \max_{all\,y} f(\mathbf{y})$

ดังนั้น

$$Z(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \frac{f(\mathbf{x}^{*K},\mathbf{y}^{*C})+f(\mathbf{y}^{*K},\mathbf{x}^{*C})}{2}$$

$$= \frac{f(\mathbf{x}^*)+f(\mathbf{y}^*)}{2} \quad \text{(จาก C = 0)}$$

$$= \frac{f(\mathbf{x}^{**})+f(\mathbf{y}^*)}{2}$$

$$\geq \frac{\max_{all\,x} f(\mathbf{x}) + \max_{all\,y} f(\mathbf{y})}{2}$$

$$= \frac{\max_{all\,x,all\,y} \{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\}}{2} \quad \text{(จากบทตั้ง 2.2)}$$

$$= \max_{all\,x,all\,y} \frac{f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})}{2} \quad \text{(จากบทตั้ง 2.1)}$$

$$= R_{NKC}$$

จากการพิสูจน์ผลเฉลยของตัวแบบทั้งสองข้างต้นทำให้สามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ *NKC* เป็น NP-*hard* และจากการพิสูจน์ทั้งสองขั้นตอน (ตัวแบบ *NKC* ∈NP และ ตัวแบบ *NKC* ∈NP-*hard*) ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ *NKC* เป็น NP-*complete*

การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ของตัวแบบ *NKC*

ในหัวข้อนี้จะแสดงการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยสำหรับกรณีสุดขีด (Extreme Case) ของตัวแบบ *NKC* โดยอาศัยคุณสมบัติของค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มและค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบซับซ้อนซึ่งเป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NK*

ถ้ากำหนดให้ $E[f(\mathbf{x}^{**})]$ แทนค่าคาดหวังของค่าประสิทธิผลของระบบ **x**** ซึ่งเป็นระบบซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NK* ดังนั้น ในกรณีที่ $K = 0$ จะได้ $E[f(\mathbf{x}^{**})] = 2/3$ และในกรณีที่ $K = N-1$ และ N มีค่ามาก จะได้ $E[f(\mathbf{x}^{**})] = 1/2$

ถ้ากำหนดให้ระบบพหุซับซ้อน $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ เป็นผลเฉลยของกรณีสุดขีดของตัวแบบ *NKC* ดังนั้นจะแสดงการคำนวณค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อน $(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)$ ได้ต่อไปนี้

1. กรณี $K = 0$ และ $C = 0$

$$\begin{aligned} E[f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)] &= E[\frac{f(\mathbf{x}^{*K},\mathbf{y}^{*C}) + f(\mathbf{y}^{*K},\mathbf{x}^{*C})}{2}] \\ &= \frac{1}{2}\{E[f(\mathbf{x}^*)] + E[f(\mathbf{y}^*)]\} \\ &= \frac{1}{2}\{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. กรณี $K = N-1$ และ $C = 0$ เมื่อ N มีค่ามาก

$$\begin{aligned} E[f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)] &= E[\frac{f(\mathbf{x}^{*K},\mathbf{y}^{*C}) + f(\mathbf{y}^{*K},\mathbf{x}^{*C})}{2}] \\ &= \frac{1}{2}\{E[f(\mathbf{x}^*)] + E[f(\mathbf{y}^*)]\} \\ &= \frac{1}{2}\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. กรณี $K = 0$ และ $C = N-1$ เมื่อ N มีค่ามาก

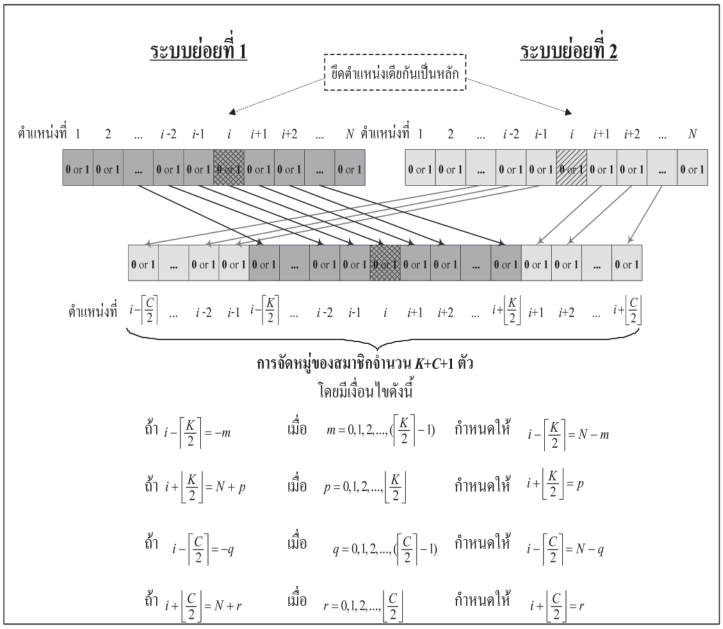
$$\begin{aligned} E[f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)] &= E[\frac{f(\mathbf{x}^{*0},\mathbf{y}^{*N-1}) + f(\mathbf{y}^{*0},\mathbf{x}^{*N-1})}{2}] \\ &= \frac{1}{2}\{E[\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i^0,y_i^{N-1})}{N}] + E[\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i(y_i^0,x_i^{N-1})}{N}]\} \\ &= \frac{1}{2N}\{\sum_{i=1}^{N} E[f_i(x_i^0,y_i^{N-1})] + \sum_{i=1}^{N} E[f_i(y_i^0,x_i^{N-1})]\} \\ &= \frac{1}{2N}\{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\} \quad \text{(เนื่องจาก } N \text{ มีค่ามาก)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. กรณี $K = N-1$ และ $C = N-1$ เมื่อ N มีค่ามาก พิสูจน์คล้ายกรณี $K = 0$ และ $C = N-1$ ซึ่งจะได้ว่า $E[f(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)] = 1/2$ เช่นเดียวกัน

การจำลองตัวแบบ *NKC*

ข้อกำหนดของระบบพหุซับซ้อนในตัวแบบ *NKC*

จากที่กล่าวไว้ในหัวข้อตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบพหุซับซ้อนแบบเป้าหมายเดียว ว่าระบบพหุซับซ้อนในงานวิจัยนี้ประกอบไปด้วยระบบซับซ้อน 2 ระบบซึ่งกำหนดให้เป็นระบบย่อยที่ 1 และระบบย่อยที่ 2 แต่ละระบบย่อยที่เป็นไปได้แทนด้วยเวกเตอร์ทวิภาค *N* เวกเตอร์ ส่วนค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนกำหนดให้เป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลประกอบซึ่งกำหนดให้เป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง [0,1] ที่สัมพันธ์กับการจัดหมู่ของสมาชิกจำนวน $K+C+1$ ตัว ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 การจัดหมู่ของสมาชิกจำนวน *K*+*C*+1 ตัว ซึ่งสัมพันธ์กับค่าประสิทธิผลประกอบที่ *i* ของระบบย่อยที่ 1

ขั้นตอนวิธีสำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ *NKC*

ในบทความวิจัยนี้ได้เสนอขั้นตอนวิธีฮิวริสติค ซึ่งเกิดจากการผสมผสานระหว่างกระบวนการไต่เขา (Hill Climbing Process) และกระบวนการแทนที่ 1 ตำแหน่ง (One-Replacement Process) เพื่อใช้สำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* โดยกระบวนการไต่เขาจะใช้สำหรับค้นหาระบบที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงกว่าระบบตั้งต้น (Initial Systems) และกระบวนการแทนที่ 1 ตำแหน่งใช้สำหรับหาระบบย่านใกล้เคียง (Neighbor) ของระบบตั้งต้น ซึ่งขั้นตอนวิธีดังกล่าวมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกระบบ **x** เป็นระบบตั้งต้นของระบบย่อยที่ 1 และระบบ **y** เป็นระบบตั้งต้นของระบบย่อยที่ 2 พร้อมทั้งคำนวณค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อน **(x,y)**

ขั้นที่ 2 หาระบบย่านใกล้เคียง **x′** ของระบบ **x** ทั้งหมด พร้อมทั้งคำนวณค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อน **(x′, y)**

ขั้นที่ 3 เลือกระบบพหุซับซ้อน **(x*,y)** ซึ่งเป็นระบบที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงสุด

ขั้นที่ 4 กำหนดให้ **x = x***

ขั้นที่ 5 หาระบบย่านใกล้เคียง **y′** ของระบบ y ทั้งหมด พร้อมทั้งคำนวณค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อน **(x,y′)**

ขั้นที่ 6 เลือกระบบพหุซับซ้อน **(x,y*)** ซึ่งเป็นระบบที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงสุด

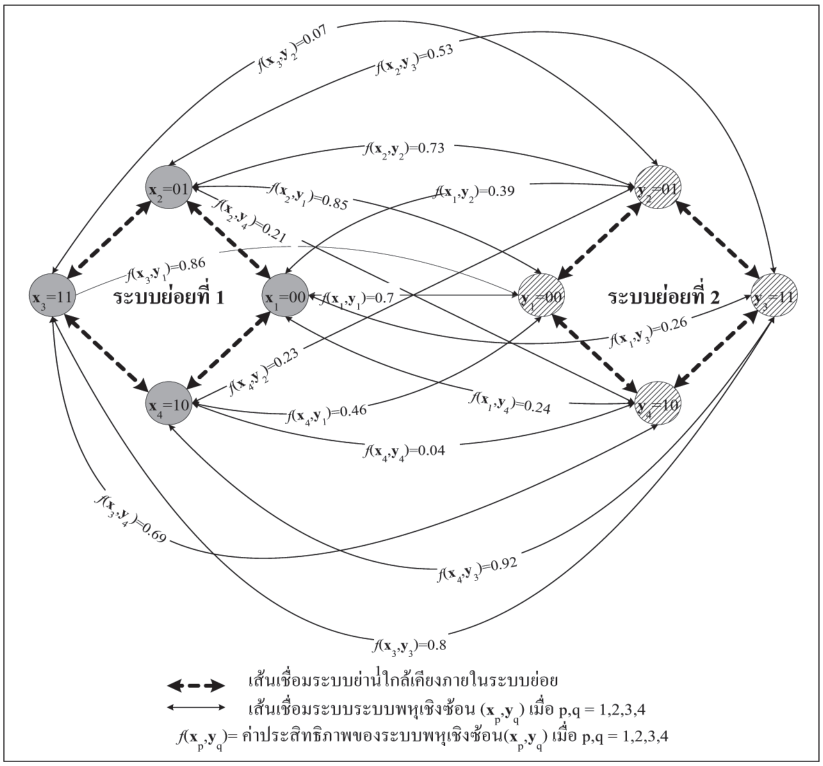
ขั้นที่ 7 กำหนดให้ **y = y***

ขั้นที่ 8 กลับไปทำขั้นที่ 2 จนกระทั่งได้ระบบพหุซับซ้อน **(x,y)** ซึ่งเป็นระบบที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงกว่าค่าประสิทธิผล

ของระบบพหุซับซ้อนที่เกิดจากระบบย่านใกล้เคียงของทั้งระบบ **x** และระบบ **y**

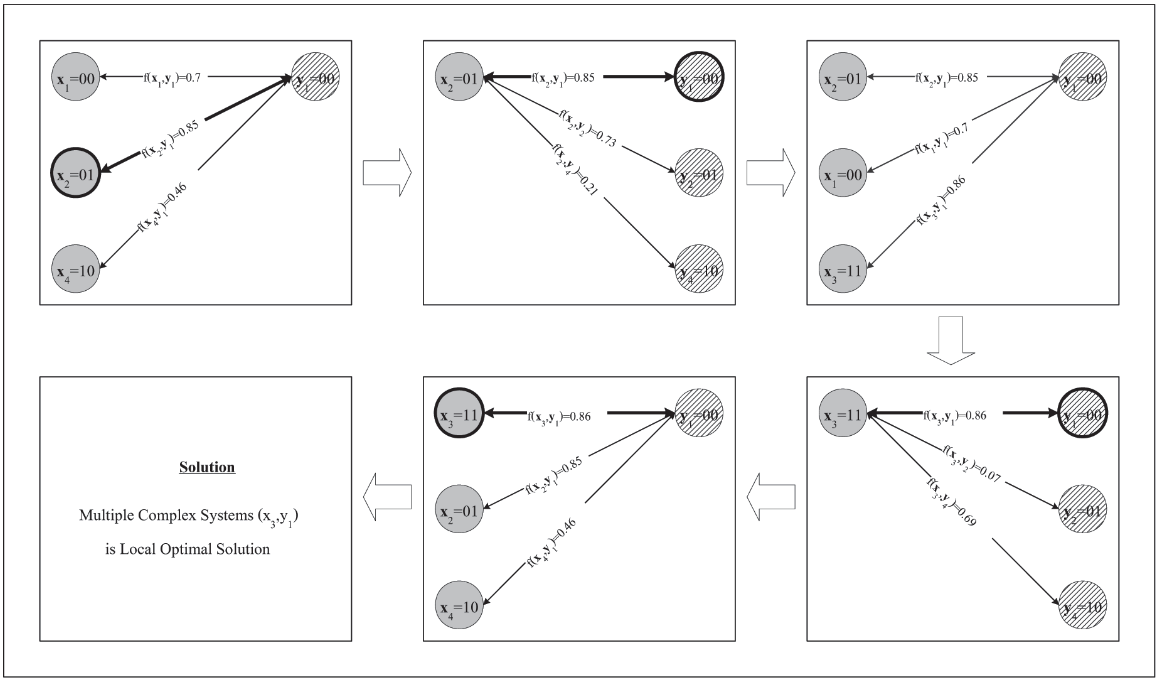
ผลเฉลยที่ได้จากขั้นตอนวิธีดังกล่าวอาจไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด ซึ่งเรียกว่า ผลเฉลยเฉพาะที่ (Local Optimal Solution) ซึ่งอาจมีได้มากกว่า 1 ผลเฉลย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับระบบที่เลือกเป็นระบบตั้งต้น

รูปต่อไปนี้แสดงให้เห็นลักษณะของพหุระบบซับซ้อนซึ่งประกอบด้วย 2 ระบบย่อย ระบบที่เป็นไปได้ของทั้งสองระบบย่อยซึ่งแทนด้วยเวกเตอร์ทวิภาค ระบบย่านใกล้เคียง และค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนทั้งหมดในตัวแบบ *NKC* กรณี $N = 2$



รูปที่ 5 ค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแบบ *NKC* กรณี $N = 2$

โดยขั้นตอนวิธีฮิวริสติคดังกล่าวข้างต้นสามารถหาผลเฉลยเฉพาะที่ของตัวแบบ *NKC* ในรูปที่ 5 ดังแสดงขั้นตอนไว้ในรูปที่ 6



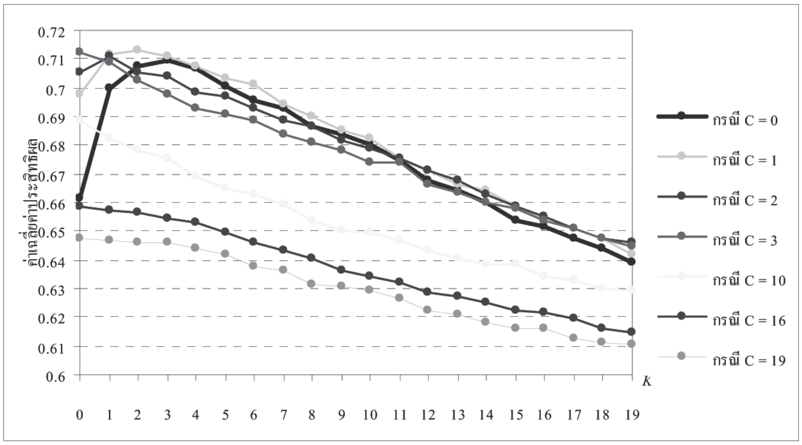
รูปที่ 6 ขั้นตอนสำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* ในรูปที่ 5

ผลการจำลองทางคอมพิวเตอร์สำหรับตัวแบบ *NKC*

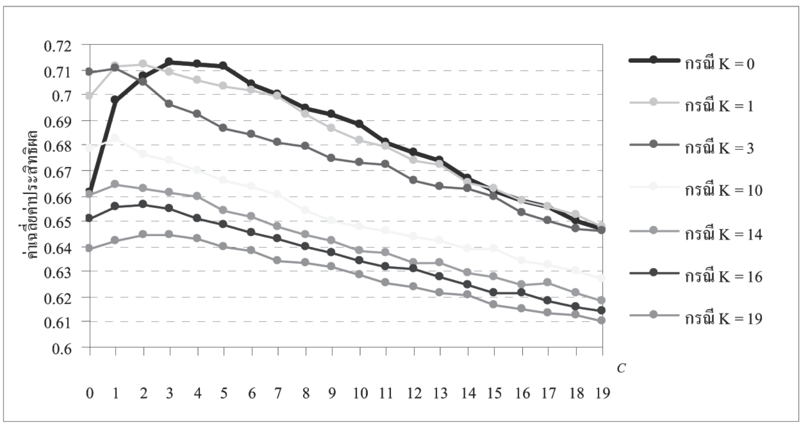
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลของการจำลองทางคอมพิวเตอร์จากโปรแกรมซึ่งเขียนด้วยภาษา C เพื่อวิเคราะห์ปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC*

จากการจำลองทางคอมพิวเตอร์พบว่าจำนวน *K* และ *C* ซึ่งเป็นจำนวนเต็มในช่วง [0, *N*-1] มีผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* ถ้ากำหนดให้ค่าเฉลี่ยค่าประสิทธิผลเป็นตัวแทนของค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC*, *K* คือ จำนวนปัจจัยภายในที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบ และ *C* คือ จำนวนปัจจัยภายนอกที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลของระบบ จากการวิเคราะห์ในหัวข้อ 3 พบว่ากรณีที่ไม่มีทั้งปัจจัยภายในและปัจจัยภายนอกมากระทบต่อสมาชิกในแต่ละตำแหน่งของระบบ (*C* = 0 และ *K* = 0) ค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ 2/3 ส่วนในกรณีที่มีเฉพาะปัจจัยภายในเป็นจำนวนน้อยกว่าขนาดของระบบอยู่หนึ่งจำนวนมากระทบสมาชิกในแต่ละตำแหน่งของระบบ (*C* = 0 และ *K* = *N*-1) เมื่อขนาดของระบบมีค่ามาก ค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ 1/2

อย่างไรก็ตาม เมื่อเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลของระบบที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* กับจำนวนปัจจัยภายในและจำนวนปัจจัยภายนอกแตกต่างกัน จะพบว่าในกรณีที่ทั้งจำนวนปัจจัยภายในและจำนวนปัจจัยภายนอกมีค่าน้อยค่าประสิทธิผลของระบบจะมีค่าสูง จากนั้นค่า



รูปที่ 7 กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนเต็ม *K* และค่าเฉลี่ยค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* กรณี $N = 20$ และ $C \in \{0,1,2,3,10,16,19\}$ โดยใช้การจำลอง 500 ครั้ง



รูปที่ 8 กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนเต็ม *C* และค่าเฉลี่ยค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* กรณี $N = 20$ และ $K \in \{0,1,3,10,14,16,19\}$ โดยใช้การจำลอง 500 ครั้ง

ประสิทธิผลดังกล่าวจะลดลงเมื่อจำนวนปัจจัยทั้งสองเพิ่มมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7 และรูปที่ 8

จากรูปที่ 7 จะเห็นว่า ในขณะที่จำนวนปัจจัยภายนอกมีค่าน้อย (C = 0, 1, 2) ลักษณะของกราฟซึ่งแทนความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* กับจำนวนปัจจัยภายใน จะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของความวิบัติซับซ้อน และจุดเริ่มต้นของกราฟ (K=0) จะมีค่าประสิทธิผลของระบบสูงขึ้นเมื่อจำนวนปัจจัยภายนอกสูงขึ้น แต่เมื่อจำนวนปัจจัยภายนอกเพิ่มขึ้น ($C \geq 3$) ความวิบัติซับซ้อนจะหายไป ลักษณะของกราฟจะลดลงทางเดียว (Monotonic Decreasing) และจุดเริ่มต้นของกราฟจะมีค่าลดลงเมื่อจำนวนปัจจัยภายนอกมีค่าสูงขึ้น

สำหรับรูปที่ 8 จะพบว่าลักษณะของกราฟซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* กับจำนวนปัจจัยภายนอกจะมีความวิบัติซับซ้อนเกิดขึ้นในทุกๆ ค่าของจำนวนปัจจัยภายใน นอกจากนี้ยังพบว่าจุดเริ่มต้นของกราฟ (C = 0) จะเพิ่มขึ้นเมื่อจำนวนปัจจัยภายในมีค่าน้อย (K = 0, 1, 2, 3) จากนั้นจุดเริ่มต้นของกราฟจะค่อยๆ ลดลงเมื่อจำนวนปัจจัยภายนอกมีค่าเพิ่มขึ้น ($K \geq 4$)

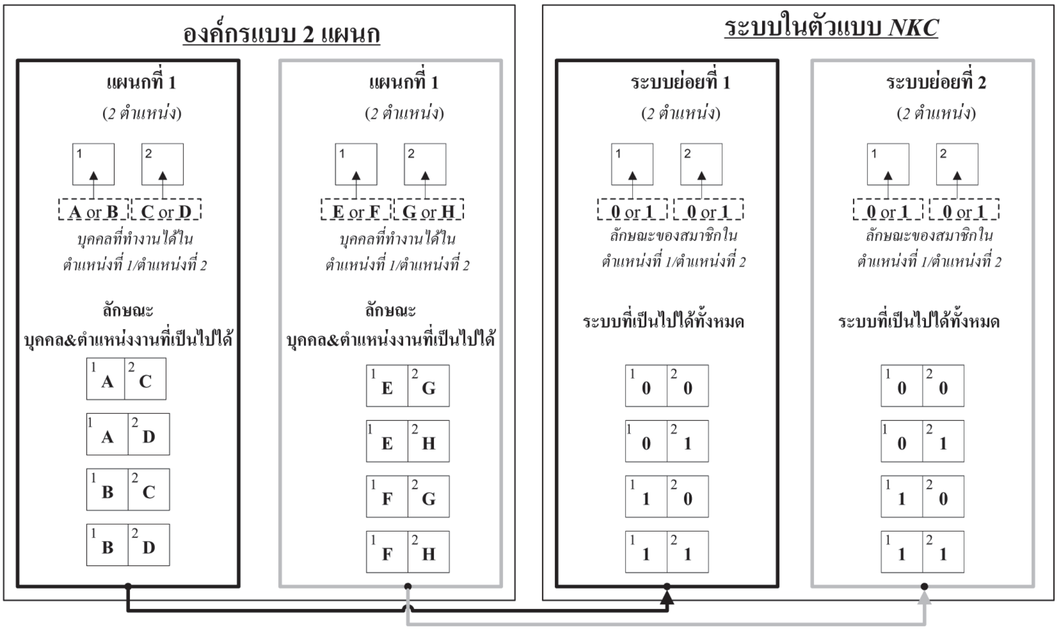
นอกจากนี้ถ้าพิจารณากรณีสุดขีด (Extreme Case) ของจำนวนปัจจัยภายในและจำนวนปัจจัยภายนอก ($K = N$-1 และ $C = N$-1) จะพบว่าเมื่อขนาดของระบบมีค่ามาก ค่าคาดหวังค่าประสิทธิผลของระบบที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* จะมีค่าเท่ากับ 1/2 ซึ่งแสดงการคำนวณไว้ในหัวข้อ 3

จากผลการจำลองทางคอมพิวเตอร์ดังกล่าวข้างต้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่า ค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนที่เป็นผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* มีค่าขึ้นอยู่กับจำนวนปัจจัยภายในและจำนวนปัจจัยภายนอก โดยถ้าทั้งปัจจัยภายในและปัจจัยภายนอกมีจำนวนน้อย จะส่งผลให้ค่าประสิทธิผลของระบบดังกล่าวมีค่ามาก แต่ในทางกลับกันถ้าทั้งปัจจัยภายในและปัจจัยภายนอกมีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าประสิทธิผลของระบบดังกล่าวก็จะมีค่าน้อยลง

การประยุกต์ตัวแบบ *NKC* สำหรับการทำงานขององค์กรแบบหลายแผนก

ตัวแบบ *NKC* ในงานวิจัยนี้สามารถใช้อธิบายความสัมพันธ์ในการทำงานขององค์กรแบบ 2 แผนกได้ โดยที่แผนกทั้งสองขององค์กรจะต้องมีตำแหน่งงานเท่ากัน และบุคคลที่จะมาทำงานในตำแหน่งต่างๆ ของแต่ละแผนกกำหนดให้เป็นไปได้เพียง 2 คนเท่านั้น ประสิทธิผลการทำงานของแต่ละคนในแต่ละตำแหน่งขึ้นอยู่กับความสามารถของบุคคลนั้นและความสัมพันธ์จากบุคคลที่อยู่ทั้งภายในแผนกเดียวกันและต่างแผนกกัน

รูปที่ 9 เป็นรูปที่แสดงให้เห็นลักษณะขององค์กรแบบ 2 แผนก โดยแต่ละแผนกประกอบด้วย 2 ตำแหน่งงาน พร้อมทั้งแสดงให้เห็นระบบซับซ้อนในตัวแบบ *NKC* ซึ่งเป็นตัวแทนลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและตำแหน่งงานของแต่ละแผนก



รูปที่ 9 ลักษณะองค์กรแบบ 2 แผนกซึ่งแต่ละแผนกมี 2 ตำแหน่งงาน และระบบซับซ้อนแทนบุคคลที่สัมพันธ์กับตำแหน่งงานของแต่ละแผนก

จากตัวอย่างลักษณะองค์กรหลายแผนกในรูปที่ 9 เราสามารถวาดกราฟแสดงระบบพหุซับซ้อนในตัวแบบ *NKC* ได้ดังรูปที่ 5 และสามารถค้นหาบุคคลเพื่อมาทำงานในตำแหน่งต่างๆ ของแต่ละแผนกได้โดยใช้ขั้นตอนวิธีซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ

ขั้นตอนวิธีสำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ *NKC*

โดยทั่วไปแล้วสำหรับองค์กรแบบ 2 แผนกที่แต่ละแผนกมีหลายตำแหน่งงานพบว่าค่าประสิทธิผลขององค์กรขึ้นอยู่กับจำนวนความสัมพันธ์ทั้งภายในและภายนอกของบุคคลที่ทำงานในตำแหน่งต่างๆ ของแต่ละแผนก โดยค่าประสิทธิผลขององค์กรจะเพิ่มขึ้นในกรณีที่จำนวนความสัมพันธ์ทั้งภายในและภายนอกต่ำ แต่ถ้าเพิ่มจำนวนความสัมพันธ์ไม่ว่าจะเป็นภายในหรือภายนอก ค่าประสิทธิผลขององค์กรก็จะลดลงในลักษณะของความวิบัติซับซ้อน ดังรูปที่ 7 และ 8

ถ้าพิจารณารูปที่ 7 โดยละเอียดแล้ว พบว่าจำนวนความสัมพันธ์ภายนอกน้อยๆ จะส่งผลดีต่อประสิทธิผลขององค์กรในทุกๆ กรณี ซึ่งลักษณะเช่นนี้อาจเป็นไปได้ เนื่องจากในการทำงานนั้นบุคคลที่อยู่ในแผนกเดียวกันอาจมองไม่เห็นจุดบกพร่องในการทำงานภายในแผนกของตน แต่ถ้าได้บุคคลจากภายนอกเพียงไม่กี่คนคอยชี้จุดบกพร่องแล้ว งานที่ออกมาก็จะมีประสิทธิผลมาก อย่างไรก็ตามหากจำนวนความสัมพันธ์จากภายนอกมีจำนวนมากก็อาจก่อให้เกิดความวุ่นวายขึ้นได้ ซึ่งส่งผลให้ประสิทธิผลของงานลดต่ำลง

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้เสนอตัวแบบ *NKC* ซึ่งเป็น

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับอธิบายระบบพหุซับซ้อนแบบเป้าหมายร่วมที่มีเงื่อนไข ดังนี้

1. ระบบพหุซับซ้อนในตัวแบบ *NKC* เกิดจากระบบซับซ้อนเพียง 2 ระบบเท่านั้น

2. ระบบซับซ้อนทั้งสองระบบมีขนาดเท่ากับ *N*

3. สมาชิกที่เป็นไปได้ในแต่ละตำแหน่งของระบบซับซ้อนมีรูปแบบที่เป็นไปได้เพียง 2 ลักษณะ

ตัวแบบ *NKC* เป็นตัวแบบที่มุ่งค้นหาระบบพหุซับซ้อนที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงที่สุด โดยที่ค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนกำหนดให้เป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลของระบบซับซ้อนที่เป็นระบบย่อยของระบบพหุซับซ้อนทั้งหมด การคำนวณค่าประสิทธิผลของระบบซับซ้อนอาศัยหลักการเช่นเดียวกับตัวแบบ *NK* ของคอฟฟ์แมน คือ กำหนดให้ค่าประสิทธิผลของระบบซับซ้อนเป็นค่าเฉลี่ยของค่าประสิทธิผลประกอบทั้งหมด โดยที่ค่าประสิทธิผลประกอบแทนด้วยเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง [0,1] ซึ่งสัมพันธ์กับการจัดหมู่ของสมาชิกที่มีผลกระทบตัวกันจำนวน *K*+*C*+1 ตัว โดยที่การจัดหมู่ดังกล่าวสร้างขึ้นเพื่อเป็นตัวแทนความสัมพันธ์ของสมาชิกจำนวน *K*+1 ตัวที่อยู่ภายในระบบซับซ้อนที่พิจารณาและสมาชิกอีก *C* ตัวจากอีกระบบซับซ้อนหนึ่ง

จากข้อกำหนดของตัวแบบ *NKC* ข้างต้นทำให้สามารถแสดงได้ว่าตัวแบบ *NKC* เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงการจัด ยิ่งกว่านั้นยังสามารถแสดงได้อีกว่า ตัวแบบ *NKC* เป็นปัญหาหนึ่งใน NP-*complete* ทำให้ทราบแนวทางในการหาขั้นตอนวิธีสำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ

ในงานวิจัยนี้ได้เสนอขั้นตอนวิธีฮิวริสติคสำหรับหาผลเฉลยของตัวแบบ *NKC* ซึ่งขั้นตอนวิธีดังกล่าวเป็นการผสมผสานระหว่างกระบวนการไต่เขาและกระบวนการแทนที่ 1 ตำแหน่ง โดยกระบวนการดังกล่าวแม้ผลเฉลยที่ได้อาจจะไม่ใช่ผลเฉลยที่ดีที่สุด แต่ก็เป็นผลเฉลยที่ดีพอได้ในระดับหนึ่ง กล่าวคือ ผลเฉลยที่ได้จะเป็นระบบพหุซับซ้อนที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงกว่าค่าประสิทธิผลของระบบย่านใกล้เคียงทั้งหมด

ผลจากการจำลองทางคอมพิวเตอร์ทำให้สามารถสรุปได้ว่าจำนวนความสัมพันธ์ของสมาชิกทั้งภายในและภายนอกของระบบซับซ้อนที่ประกอบขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อน มีผลต่อประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนนั้นๆ กล่าวคือ ในขณะที่จำนวนความสัมพันธ์ทั้งภายในและภายนอกมีค่าน้อย ค่าประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนจะมีค่าสูง แต่เมื่อเพิ่มจำนวนความสัมพันธ์ไม่ว่าจะเป็นภายในหรือภายนอกระบบจะเป็นผลทำให้ประสิทธิผลของระบบพหุซับซ้อนมีค่าลดลงตามลักษณะของความวิบัติซับซ้อน

อย่างไรก็ตามตัวแบบ *NKC* ที่สร้างขึ้นในงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับเฉพาะระบบพหุซับซ้อนที่มีลักษณะตามเงื่อนไขที่กำหนดเท่านั้น เพื่อประโยชน์ในการนำตัวแบบดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในอนาคตผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวทางการศึกษาเพิ่มเติมโดยได้เสนอแยกเป็นข้อๆ ดังนี้

1. เพิ่มจำนวนของระบบซับซ้อนที่ประกอบขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อน

2. กำหนดให้ระบบซับซ้อนที่ประกอบขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อนมีขนาดแตกต่างกัน

3. เพิ่มลักษณะของสมาชิกที่เป็นไปได้ในแต่ละตำแหน่งของระบบซับซ้อน

4. เปลี่ยนแปลงลักษณะการจัดหมู่ของสมาชิกที่มีผลกระทบตัวกันโดยอาจจะใช้การสุ่มตำแหน่งของสมาชิกที่มีผลกระทบต่อสมาชิกในตำแหน่งที่พิจารณา

5. เปลี่ยนแปลงลักษณะของเลขสุ่มที่สัมพันธ์กับการจัดหมู่ของสมาชิก โดยอาจจะใช้เลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติแทนเลขสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปที่ใช้ในงานวิจัยนี้

6. เพิ่มการถ่วงน้ำหนักเพื่อระบุความสำคัญของสมาชิกในแต่ละตำแหน่งของระบบซับซ้อน

7. เปลี่ยนแปลงการเลือกระบบย่านใกล้เคียงของแต่ละระบบย่อยในขั้นตอนวิธีฮิวริสติคเป็นแบบมาก่อนเลือกก่อน (First Come First Serve) ซึ่งหมายถึง การเลือกระบบย่านใกล้เคียงของระบบย่อยที่ประกอบกันขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อนระบบแรกที่ให้ค่าประสิทธิผลสูงกว่าระบบพหุซับซ้อนตั้งต้น หรือใช้การสุ่มเลือกระบบย่านใกล้เคียงของระบบย่อยที่ประกอบกันขึ้นเป็นระบบพหุซับซ้อนที่ให้ค่าประสิทธิภาพสูงกว่าระบบพหุซับซ้อนตั้งต้นก็ได้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ อ.นิศากร วัฒนศิริพงษ์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา สำหรับข้อเสนอแนะที่ช่วยทำให้งานวิจัยชิ้นนี้มีความถูกต้องสมบูรณ์

บรรณานุกรม

Chartchai Leenawong. 2003. "On Modeling a Complex System with Interacting Components." **KMITL Science Journal** 3: 107-115.

Chartchai Leenawong, and Ponrudee Netisopakul. 2004. "Modeling and Optimization Approaches for the Team-Building Problem." In **Proceedings of the 5th Asia-Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference, Gold Coast, Australia,** pp. 14.1-14.11. Brisbane: Queensland University of Technology Printery.

Derrida, B. 1981. "Random-Energy Model: an Exactly Solvable Model of Disordered Systems." **Physical Review B** 24: 2613-2620.

Kauffman, S.A. 1993. **The Origins of Order.** Oxford: Oxford University Press.

Kauffman, S.A., and Johnsen, S. 1991. "Coevolution to the Edge of Chaos: Coupled Fitness Landscapes, Poised States, and Coevolutionary Avalanches." **Journal of Theoretical Biology** 149: 467-505.

Levinthal, D.A. 1997. "Adaptation on Rugged Landscapes." **Management Science** 43: 934-950.

Solow, D., et al. 1999. "Understanding and Attenuating the Complexity Catastrophe in Kauffman's NK Model of Genome Evolution." **Complexity** 5: 1-21.

_________. 2002. "Managerial Insights into the Effects of Interactions among Members of a Team." **Management Science** 48: 1060-1073.

Westhoff, F.H., Yarbrough, B.V., and Yarbrough, R.M. 1996. "Complexity, Organization, and Stuart Kauffman's The Origins of Order." **Economic Behavior and Organization** 29: 1-25.

Asst. Prof. Dr. Chartchai Leenawong received a B.Sc. in Mathematics from Chulalongkorn University, an M.Sc. in Computer Science from the Asian Institute of Technology, and a Ph.D. in Operations Research from Case Western Reserve University, Ohio, USA. He is currently working at the Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. His research interests include Combinatorial Optimization, Supply Chain Logistics, and Operations Research applications.

Ms. Sutitar Maneechai received a B.Sc. in Mathematics from Prince of Songkla University and an M.Sc. in Applied Mathematics from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. She works at the Department of Mathematics, Faculty of Science, Prince of Songkla University. Her research interests include Industrial Mathematics, Financial Mathematics, and Combinatorial Optimization.