การวิเคราะห์การจัดกิจกรรมของหอการค้าเยอรมัน-ไทย โดยใช้ 1-การแยกตัวประกอบและสามสิ่งของเคิร์กแมน
Analysis of the German-Thai Chamber of Commerce's Organization of Activities by 1-Factorizations and Kirkman Triple Systems

ลดามาศ สายเพชร[1] กิตติธัช เอี่ยมทอง[2] และ จริยา อุ่ยยะเสถียร[3]

[1,2,3]ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Ladamas Saiphet[1] Kittitat Iamthong[2] and Chariya Uiyyasathien[3]

[1,2,3]Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Chulalongkorn University

E-mail: [1]ladamas.sa@gmail.com, [2]kittitat.pele@gmail.com, [3]chariya.u@chula.ac.th

บทคัดย่อ

หอการค้าเยอรมัน-ไทยจัดกิจกรรมพบปะสมาชิกใหม่ทุกไตรมาส เพื่อให้สมาชิกใหม่ทุกบริษัทได้พูดคุยและทำความรู้จักกัน ในการพบปะแต่ละครั้ง หอการค้าต้องการจัดกิจกรรมโดยใช้เวลาน้อยที่สุด แต่ในขณะเดียวกันก็ต้องการแน่ใจว่า สมาชิกทุกบริษัทจะมีโอกาสได้พบกันทั้งหมด ในบทความนี้เรานำเสนอวิธีการจัดกิจกรรมดังกล่าวแบบพบกันหมด โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับ 1-การแยกตัวประกอบและระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนมาช่วยในการจัดกิจกรรมให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด

คำสำคัญ: 1-ตัวประกอบ 1-การแยกตัวประกอบ ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน

Abstract

The German-Thai Chamber of Commerce organizes new member orientation programs quarterly, in order for new members to get to know each other. In each program. The organizer prefers to spend the least time possible, but also wants to ensure that every two members meet each other once. In this article, solutions for organizing such activities using 1-factorizations and Kirkman triple systems are proposed.

Keywords: 1-factor, 1-factorization, Kirkman triple system

1. บทนำ

หอการค้าเยอรมัน-ไทยเป็นส่วนหนึ่งของเครือข่ายหอการค้าเยอรมัน ซึ่งเป็นองค์กรเอกชนที่ได้รับการสนับสนุนจากรัฐบาลเยอรมนี มีสาขากว่า 130 สาขาใน 90 ประเทศทั่วโลก [3] ทำหน้าที่ให้บริการข้อมูลข่าวสารและคำแนะนำเกี่ยวกับการดำเนินการทางธุรกิจต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับไทยและเยอรมนี ทั้งยังเป็นสื่อกลางระหว่างสมาชิกในหอการค้า ซึ่งได้แก่องค์กรและบริษัทธุรกิจต่าง ๆ ให้เชื่อมถึงกัน จากข้อมูลในรายงานประจำปี 2558 หอการค้าเยอรมัน-ไทยมีสมาชิกทั้งสิ้น 580 ราย และเป็นสมาชิกใหม่ที่เข้าร่วมในปีดังกล่าว 87 ราย [3]

ในทุก ๆ ไตรมาส หอการค้าเยอรมัน-ไทยจะจัดกิจกรรมให้สมาชิกใหม่พบปะกัน เพื่อทำความรู้จักและสร้างเครือข่ายทางธุรกิจที่เอื้อประโยชน์ให้แก่กันและกัน อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการจัดกิจกรรมแต่ละครั้งมีค่าใช้จ่าย (เช่น ค่าเช่าสถานที่ในโรงแรม ซึ่งแปรผันตามระยะเวลาที่ใช้) ทางหอการค้าจึงต้องการประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายให้ได้มากที่สุด แต่ในขณะเดียวกันก็ต้องการแน่ใจว่าสมาชิกทุกคู่จะมีโอกาสพบกันทั้งหมด ผู้จัดงานจึงพยายามหารูปแบบในการจัดกิจกรรมดังกล่าวให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด

ภาพที่ 1 กิจกรรมแนะนำตัวของสมาชิกใหม่หอการค้าเยอรมัน-ไทย
(*ที่มา*: http://thailand.ahk.de/en/members/new-member-orientation/ สืบค้นวันที่ 13 ธันวาคม 2559)

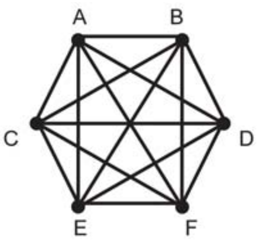
คุณสุทธิลีน ศรีเกษตรสรากุล ผู้จัดการฝ่ายสมาชิกของหอการค้าเยอรมัน-ไทยให้ข้อมูลกับผู้เขียนว่าจากความต้องการประหยัดเวลา ในตอนเริ่มต้นผู้จัดงานจึงต้องการให้สมาชิกใหม่พบปะกันกลุ่มละ 3 บริษัทเพื่อพูดคุยและทำความรู้จักกัน จากนั้นจึงให้สมาชิกเปลี่ยนกลุ่มพูดคุยจนกระทั่งสมาชิกใหม่ทุกบริษัทได้พบกันทั้งหมด และไม่มีสมาชิกคู่ใดพบกันซ้ำ ผู้จัดงานพยายามหารูปแบบการจัดกิจกรรมแบบดังกล่าวด้วยวิธีลองผิดลองถูกอยู่หลายครั้ง แต่ยังไม่สามารถทำได้ จึงยอมเปลี่ยนเงื่อนไขกิจกรรมเป็นการพบปะกันแบบเป็นคู่ ๆ และใช้วิธีลองผิดลองถูกในการจัดกิจกรรม จนสามารถจัดกิจกรรมด้วยเงื่อนไขดังกล่าวได้ในที่สุด จากนั้นมา ผู้จัดงานจึงเลือกจัดกิจกรรมแบบพบปะกันเป็นคู่ ๆ และใช้วิธีลองผิดลองถูกในการจัดทุกครั้ง

ภาพที่ 2 กิจกรรมแนะนำตัวของสมาชิกใหม่ในไตรมาสที่ 4 ปี 2558
(*ที่มา*: http://thailand.ahk.de/en/members/new-member-orientation/new-member-orientation-42015/
สืบค้นวันที่ 13 ธันวาคม 2559)

ในบทความนี้เราจะให้วิธีการจัดกิจกรรมพบปะสมาชิกใหม่แบบเป็นคู่ ๆ เมื่อจำนวนสมาชิกเป็นเลขคู่ และจะแนะนำวิธีการจัดกิจกรรมที่ทำให้สมาชิกทุกบริษัทได้พบกันเป็นคู่และพบกันทั้งหมด เมื่อจำนวนสมาชิกเป็นเลขคี่ จากนั้นจะแนะนำวิธีการจัดกิจกรรมแบบพบกันทีละ 3 บริษัท โดยใช้ความรู้เรื่องระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน (Kirkman triple system) มาช่วยอธิบายความเป็นไปได้ในการจัดกิจกรรมแบบดังกล่าว นอกจากนี้ ยังแนะนำวิธีการจัดแบบอื่น ๆ ที่อาจเป็นประโยชน์อีกด้วย

สังเกตว่าเราสามารถจำลองกิจกรรมพบปะสมาชิกใหม่ของหอการค้าเยอรมัน-ไทยในรูปแบบของกราฟได้ โดยแทนสมาชิกใหม่แต่ละบริษัทด้วยจุดยอด และแทนการพบปะกันระหว่างสมาชิก x และสมาชิก y ด้วยเส้นเชื่อม xy เนื่องจากกิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมแบบพบกันหมด เราจะได้กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph)[1] K_n เมื่อ n เป็นจำนวนสมาชิกใหม่ทั้งหมดที่เข้าร่วมกิจกรรม

ตัวอย่าง 1 สมมติว่าในไตรมาสแรกมีสมาชิกใหม่เข้าร่วมกิจกรรมแนะนำตัวทั้งหมด 6 ราย ได้แก่ ตัวแทนบริษัท A, B, C, D, E และ F เราจะได้กราฟจำลองกิจกรรมแนะนำตัวเป็นกราฟแบบบริบูรณ์ K_6 ดังภาพ



ภาพที่ 3 กราฟแบบบริบูรณ์ K_6

สังเกตว่าทุก ๆ 2 จุดใด ๆ มีเส้นเชื่อมระหว่างกัน 1 เส้นเสมอ นั่นคือ ทุก ๆ คู่สมาชิกได้พบปะกัน 1 ครั้งทั้งหมด

[1] กราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) คือกราฟที่ทุก ๆ คู่ของจุดยอดมีเส้นเชื่อมกันเสมอ

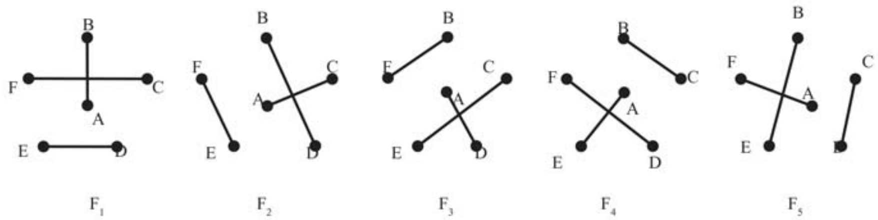
2. 1-การแยกตัวประกอบ (One-Factorizations)

หากเราต้องการจัดกิจกรรมโดยให้สมาชิกใหม่ทุกบริษัทพบปะกันเป็นคู่ แน่นอนว่าจำนวนสมาชิกใหม่ที่เข้าร่วมจะต้องมีเป็นจำนวนคู่ ดังนั้น เราจะแทนการจัดกิจกรรมด้วยกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} และเนื่องจากเป็นไปไม่ได้ที่ตัวแทนบริษัท A จะพบกับตัวแทนบริษัท B และ A จะพบกับตัวแทนบริษัท C ในเวลาเดียวกัน ดังนั้น เราจึงต้องแบ่งการพบปะออกเป็นรอบ ๆ นั่นคือ เราจะแบ่งเส้นเชื่อมในกราฟ K2n ออกเป็นผลแบ่งกั้น (partition) นั่นเอง

บทนิยาม 1 1-ตัวประกอบ (1-factor) ของกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} คือเซตของเส้นเชื่อมใน K_{2n} ที่จับคู่จุดยอดทุกจุดออกเป็นคู่ ๆ และไม่มีคู่ใดใช้จุดยอดร่วมกัน

บทนิยาม 2 1-การแยกตัวประกอบ (1-factorization) ของกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} คือ เซตของ 1-ตัวประกอบที่แบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดใน K_{2n}

ตัวอย่าง 2 จาก K_6 ในตัวอย่างก่อนหน้า จะได้ 1-การแยกตัวประกอบดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 1-การแยกตัวประกอบของ K_6

จากบทนิยาม 1 จะเห็นว่า 1-ตัวประกอบของกราฟแบบบริบูรณ์ K2n คือ เซตของเส้นเชื่อมในกราฟ แต่เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ เราจึงนิยมเขียน 1-ตัวประกอบในรูปของกราฟย่อย 1-ปรกติแบบแผ่ทั่ว (1-regular spanning subgraph) ของกราฟ K_{2n} แทน ดังนั้น จากภาพที่ 4 จะได้ว่า F_1 เป็น 1-ตัวประกอบ นั่นคือ A พบกับ B, C พบกับ F และ D พบกับ E ทำนองเดียวกัน F_2, F_3, F_4 และ F_5 เป็น 1-ตัวประกอบ นั่นคือ F = $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$ เป็นการแยกตัวประกอบ 1-ตัวประกอบของ K6

สังเกตว่า 1-ตัวประกอบแต่ละอันจะหมายถึงแต่ละรอบของการพบปะกัน และ 1-การแยกตัวประกอบก็คือวิธีการจัดกิจกรรมพบปะแบบเป็นคู่นั่นเอง

เทคนิคในตัวอย่างข้างต้นเป็นวิธีการสร้าง 1-ตัวประกอบที่ใช้ได้กับกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} สำหรับทุกจำนวนนับ n สมมติให้ K_{2n} เป็นกราฟแบบบริบูรณ์ที่มีจุดยอดเป็น $x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}$ กำหนดจุดยอด x อยู่ตรงกลาง และให้จุดยอด 2_{n-1} จุดที่เหลืออยู่รอบ ๆ เราสร้าง 1-ตัวประกอบเซตแรกด้วยการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด x กับจุดยอด x_0 และลากเส้นเชื่อม $x_1x_{2n-2}, x_2x_{2n-3}, \ldots, x_ix_{-i}, \ldots, x_{n-1}x_{-n+1}$ เพื่อจับคู่จุดยอดอื่น ๆ ที่เหลือ จากนั้นเราจะได้ 1-ตัวประกอบเซตอื่น ๆ จากการหมุนเส้นเชื่อมทั้งหมดใน 1-ตัวประกอบแรกในทิศตามเข็มนาฬิกาไปเรื่อย ๆ จนจุดยอด x มีเส้นเชื่อมกับจุดยอดทุกจุดที่อยู่รอบ ๆ

จะเห็นว่าการแยกตัวประกอบ 1-ตัวประกอบของ K_{2n} จะประกอบด้วย 1-ตัวประกอบทั้งหมด 2n-1 เซต

ทฤษฎีบท 1 กราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} มีการแยกตัวประกอบ 1-ตัวประกอบ สำหรับทุกจำนวนนับ n [8]

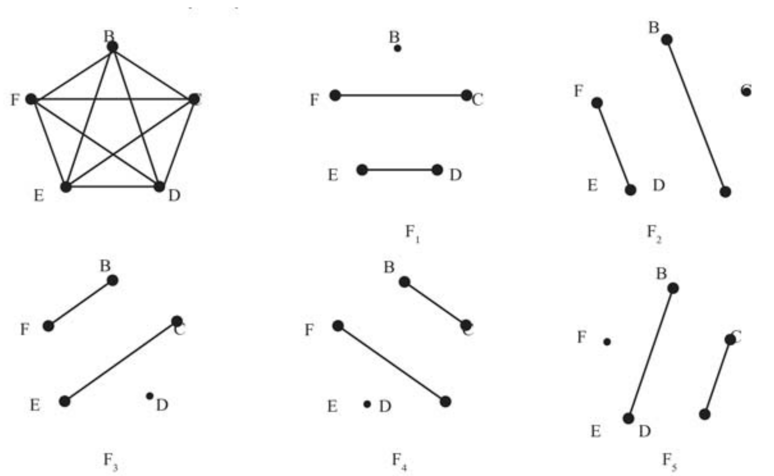
ทฤษฎีบทข้างต้นนี้นอกจากจะบอกให้เรารู้ว่า เราสามารถจับคู่สมาชิกเป็นรอบ ๆ โดยไม่เกิดกรณีคู่ซ้ำได้ เมื่อจำนวนสมาชิกเป็นเลขคู่แล้ว ยังบอกถึงวิธีการจับคู่ดังกล่าวอีกด้วย อย่างไรก็ตาม หากจำนวนสมาชิกของเราเป็นเลขคี่แล้ว เรายังสามารถจัดกิจกรรมภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวได้อยู่หรือไม่?

แน่นอนว่าเมื่อจำนวนสมาชิกเป็นเลขคี่ เราจะไม่สามารถจับคู่สมาชิกในแต่ละรอบโดยไม่เหลือเศษได้ ดังนั้น ในแต่ละรอบจะต้องมีสมาชิก 1 บริษัทที่ไม่ได้จับคู่พบปะกับใครเลย ซึ่งหากเรายอมให้เกิดเหตุการณ์นี้ได้ การจัดกิจกรรมจับคู่แนะนำตัวแบบพบกันหมดจะสามารถทำได้หรือไม่?

บทนิยาม 3 เนียร์-1-ตัวประกอบ (near-1-factor) ของกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n-1} คือ เซตของเส้นเชื่อมใน K_{2n-1} ที่จับคู่จุดยอดออกเป็นคู่ ๆ ยกเว้น 1 จุด และไม่มีคู่ใดใช้จุดยอดร่วมกัน

บทนิยาม 4 เนียร์-1-การแยกตัวประกอบ (near-1-factorization) ของกราฟแบบบริบูรณ์ K2n-1 คือ เซตของเนียร์-1-ตัวประกอบที่แบ่งกั้นเซตของเส้นเชื่อมทั้งหมดใน K2n-1

ตัวอย่าง 3 กราฟแบบบริบูรณ์ K_5 มีเนียร์-1-การแยกตัวประกอบ



ภาพที่ 5 เนียร์-1-การแยกตัวประกอบของ K5

F_1 เป็นเนียร์-1-ตัวประกอบ นั่นคือ C พบกับ F และ D พบกับ E (มี B เป็นจุดเอกเทศ) ทำนองเดียวกัน F_2, F_3, F_4 และ F_5 เป็นเนียร์-1-ตัวประกอบ นั่นคือ $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$ เป็นเนียร์-1-การแยกตัวประกอบของ K_5

เช่นเดียวกันกับ 1-ตัวประกอบ เราสังเกตว่า เนียร์-1-ตัวประกอบแต่ละอันจะหมายถึงแต่ละรอบของการพบปะกัน และเนียร์-1-การแยกตัวประกอบก็คือวิธีการจัดกิจกรรมพบปะแบบเป็นคู่ โดยแต่ละรอบจะมีสมาชิก 1 บริษัทที่ไม่ได้พบปะกับใครนั่นเอง

สังเกตว่าตัวอย่างข้างต้นนี้ได้จาก 1-การแยกตัวประกอบของกราฟแบบบริบูรณ์ K_6 ในตัวอย่าง 2 โดยการลบจุดยอดตรงกลาง (จุดยอด A) และลบเส้นเชื่อมทุกเส้นที่เชื่อมกับจุดยอดดังกล่าวออก ดังนั้น เราสามารถหาเนียร์-1-การแยกตัวประกอบของกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n-1} ได้จากการลบจุดยอด 1 จุด (และเส้นเชื่อมที่เชื่อมกับจุดยอดนั้น) ออกจาก 1-การแยกตัวประกอบของกราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n} ได้เสมอ และเนื่องจาก K_{2n} มี 1-การแยกตัวประกอบสำหรับทุกจำนวนนับ n ทำให้ได้ว่า K_{2n-1} มีเนียร์-1-การแยกตัวประกอบสำหรับทุกจำนวนนับ n ด้วยเช่นกัน

ทฤษฎีบท 2 กราฟแบบบริบูรณ์ K_{2n-1} มีเนียร์-1-การแยกตัวประกอบ สำหรับทุกจำนวนนับ n [8]

จากทั้งสองทฤษฎีบทจะได้ว่า ไม่ว่าจำนวนสมาชิกใหม่จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ตาม เราสามารถจัดกิจกรรมจับคู่แนะนำตัวแบบพบกันหมดโดยไม่เกิดคู่ซ้ำได้เสมอ และจำนวนรอบที่น้อยที่สุดที่ใช้ในการจัดกิจกรรมดังกล่าวสำหรับสมาชิก 2_n หรือ 2_{n-1} บริษัทก็คือ 2_{n-1} รอบนั่นเอง

หากเราย้อนกลับไปถึงปัญหาเริ่มต้นของผู้จัดกิจกรรมแนะนำตัวของสมาชิกใหม่หอการค้าเยอรมัน – ไทย ในตอนเริ่มต้นนั้น ทางผู้จัดงานพยายามหารูปแบบการจัดกิจกรรมของการพบปะกันกลุ่มละ 3 บริษัท โดยต้องการให้รูปแบบดังกล่าวเป็นกิจกรรมแบบพบกันหมด และไม่มีสมาชิกคู่ใดพบกันซ้ำเพื่อประหยัดเวลา เราสนใจว่า มีความเป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดกิจกรรมในรูปแบบดังกล่าว และหากสามารถทำได้ จะมีวิธีในการจัดกิจกรรมนี้อย่างไร?

แท้จริงแล้ว ปัญหาเดียวกันนี้ถูกถามและได้รับการศึกษามาแล้วกว่า 166 ปี

3. ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมน (Kirkman Triple Systems)

ย้อนกลับไปในปีพ.ศ. 2393 โธมัส เคิร์กแมน (Thomas P. Kirkman) ศาสนาจารย์และนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ได้ตั้งคำถามที่มีชื่อเสียงเกี่ยวกับ *"ปัญหานักเรียนหญิงโดยเคิร์กแมน (Kirkman's schoolgirl problem)"* ปัญหานี้กล่าวว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่จะจัดให้นักเรียนหญิง 15 คน เดินแถวในแต่ละวันตลอดสัปดาห์ โดยในแต่ละวันจะจัดนักเรียนหญิงเป็น 5 แถว แถวละ 3 คน และเมื่อครบ 7 วันแล้วนักเรียนหญิงทุกคู่จะต้องได้เดินในแถวเดียวกัน 1 วันเท่านั้น [5]

ภาพที่ 6 Thomas P. Kirkman

(*ที่มา*: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Kirkman.html สืบค้นวันที่ 13 ธันวาคม 2559)

ก่อนที่จะกล่าวถึงผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว เราจำเป็นต้องรู้จักบทนิยามต่อไปนี้ ซึ่งนำมาจากหนังสือ Design Theory ของ C.C. Lindner และ C.A. Rodger [5]

บทนิยาม 5 ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ขนาด v (Steiner triple system of order v) หรือ STS(v) คือ คู่อันดับ $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ เมื่อ $\mathcal{X}$ เป็นเซตจำกัดที่มีขนาด v และ $\mathcal{B}$ คือเซตของเซตย่อยขนาด 3 (เรียกว่า บล็อก) ของ $\mathcal{X}$ โดยที่ทุก ๆ คู่ของจุดยอดใน $\mathcal{X}$ จะต้องปรากฏร่วมกันในบล็อกเพียง 1 บล็อกเท่านั้น

ตัวอย่าง 4 ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ขนาด 7 หรือ STS(7)

$\mathcal{X}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$\mathcal{B}$ = {{1, 2, 4}, {2, 3, 5}, {3, 4, 6}, {4, 5, 7}, {1, 5, 6}, {2, 6, 7}, {1, 3, 7}}

บทนิยาม 6 ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนขนาด v (Kirkman triple system of order v): KTS(v) คือ ระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ขนาด v ที่สามารถแบ่งกั้นเซต ออกเป็นชั้น โดยที่แต่ละชั้นจะมีสมาชิกในเซต $\mathcal{X}$ ครบทุกตัวได้ เรียกว่า ชั้นขนาน (parallel class)

ตัวอย่าง 5 ระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนขนาด 9 หรือ KTS(9)

$\mathcal{X}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$\mathcal{B} = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3 \cup \pi_4$ โดยที่ $\cup$

π_1: {1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9} π_2: {1, 4, 7}, {2, 5, 8}, {3, 6, 9}

π_3: {1, 5, 9}, {2, 6, 4}, {3, 4, 8} π_4: {1, 6, 8}, {2, 4, 9}, {3, 5, 7}

จะเห็นว่าหากจำนวนสมาชิกใหม่ของหอการค้าเยอรมัน-ไทยเท่ากับ 15 บริษัท ปัญหาการจัดกิจกรรมแบบพบปะกันกลุ่มละ 3 บริษัท ก็คือ ปัญหานักเรียนหญิงโดยเคิร์กแมนนั่นเอง นั่นคือ การหา KTS(15) ซึ่งปัญหานี้ได้รับการพิสูจน์แล้วว่าสามารถทำได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6 (ปัญหานักเรียนหญิงโดยเคิร์กแมน) ให้นักเรียนหญิงทั้ง 15 คนแทนด้วยตัวอักษร A-O เราสามารถจัดการเดินแถวในแต่ละวันได้ ดังนี้ [9]

ตารางที่ 1 ตารางการเดินแถวของปัญหานักเรียนหญิงโดยเคิร์กแมน

	แถว 1	**แถว 2**	**แถว 3**	**แถว 4**	**แถว 5**
อาทิตย์	ABC	DEF	GHI	JKL	MNO
จันทร์	ADH	BEK	CIO	FLN	GJM
อังคาร	AEM	BHN	CGK	DIL	FJO
พุธ	AFI	BLO	CHJ	DKM	EGN
พฤหัสบดี	AGL	BDJ	CFM	EHO	IKN
ศุกร์	AJN	BIM	CEL	DOG	FHK
เสาร์	AKO	BFG	CDN	EIJ	HLM

สังเกตว่านักเรียนหญิงทุกคู่เคยเดินแถวด้วยกัน 1 วัน และหากเราจำลองวิธีการจัดการเดินแถวให้เป็นกราฟ กราฟที่ได้จะเป็นกราฟแบบบริบูรณ์ K15 ที่ถูกแบ่งออกเป็นบล็อกขนาด 3 (แต่ละบล็อกคือแถวของการเดิน) และกราฟสามารถแบ่งกั้นออกเป็นชั้นขนานได้ (ชั้นขนานแต่ละชั้นก็คือแต่ละวันในสัปดาห์นั่นเอง)

ตัวอย่างข้างต้นนี้แสดงให้เห็นถึงความเป็นไปได้ที่จะจัดกิจกรรมภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว ดังนั้น สิ่งที่เราสนใจต่อมา ก็คือ การจัดกิจกรรมแบบดังกล่าวจะสามารถทำได้เมื่อใดบ้าง และจะมีวิธีการในการจัดอย่างไร? นั่นคือ จะมี KTS(v) เมื่อใดบ้างและจะสร้างได้อย่างไรนั่นเอง

สังเกตว่าหากเราพิจารณา KTS(v) ในรูปแบบของกราฟ เราจะเห็นว่า สำหรับจำนวนนับ v ใด ๆ กราฟแบบบริบูรณ์ K_v จะสามารถแบ่งกั้นเป็นชั้นขนานของบล็อกขนาด 3 ได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนจุดยอดในกราฟจะต้องหารด้วย 3 ลงตัว และเนื่องจากบล็อกแต่ละบล็อกจะให้ค่าระดับขั้น (degree) ของจุดยอดเป็น 2 ดังนั้น ระดับขั้นของจุดยอดแต่ละจุดจะต้องหารด้วย 2 ลงตัวด้วย แต่จุดยอดทุกจุดใน Kv มีระดับขั้นเป็น v-1 ดังนั้นจะได้ว่า v จะต้องหารด้วย 3 ลงตัว และเป็นจำนวนคี่นั่นเอง

ทฤษฎีบท 3 ถ้ามี KTS(v) แล้วจะได้ว่า $v \equiv 3 \pmod 6$ [2]

สำหรับการพิสูจน์เงื่อนไขเพียงพอนั้น เราจะต้องสร้าง KTS(v) เมื่อ v = 6n+3 สำหรับทุกจำนวนนับ n นักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาวิธีการสร้างมาอย่างยาวนาน โดยการสร้าง KTS(v) วิธีแรกถูกคิดค้นได้สำเร็จโดยเรย์-เชาด์ฮูริและวิลสัน [6] ในปี พ.ศ. 2514 ซึ่งเป็นระยะเวลาหลังจากที่เคิร์กแมนตั้งปัญหาดังกล่าวถึง 121 ปี

ในปัจจุบันเราทราบว่ามีวิธีการสร้าง KTS(v) หลายวิธี เช่น วิธีของสตินสันและแวนสโตน [7] วิธีของบาร์เนียร์และบริสเซท [1] วิธีของลี่และคณะ [4] เป็นต้น

ในการสร้าง KTS(v) นั้นจำเป็นต้องมีความเข้าใจในเรื่องแผนแบบสมดุลทุกคู่ (pairwise balanced design: PBD) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7 แผนแบบสมดุลทุกคู่ขนาด v (pairwise balanced design of order v: PBD(v)) คือคู่อันดับ $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ เมื่อ $\mathcal{X}$ เป็นเซตจำกัดขนาด v และ $\mathcal{B}$ เป็นเซตของเซตย่อยของ $\mathcal{X}$ (เรียกว่าบล็อก) ขนาดต่าง ๆ (ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากัน) โดยที่สมาชิกทุก ๆ คู่ของ $\mathcal{X}$ จะต้องปรากฏร่วมกันเพียง 1 บล็อกเท่านั้น

สังเกตว่าระบบสามสิ่งของสไตเนอร์ STS(v) ก็คือ แผนแบบสมดุลทุกคู่ PBD(v) ที่ทุกบล็อกมีขนาด 3 เท่ากันหมด

ตัวอย่าง 7 $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ ต่อไปนี้เป็น PBD(11)

$\mathcal{X}$ = {1, 2, 3, ... , 11}

$\mathcal{B}$ = { {1, 2, 3, 4, 5}, {2, 6, 9}, {3, 7, 8}, {4, 8, 11}, {1, 6, 7}, {2, 7, 11}, {3, 9, 10}, {5, 6, 8}, {1, 8, 9}, {2, 8, 10}, {4, 6, 10}, {5, 7, 10}, {1, 10, 11}, {3, 6, 11}, {4, 7, 9}, {5, 9, 11} }

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้วิธีการสร้าง KTS(6n+3) สำหรับทุกจำนวนนับ n

ทฤษฎีบท 4 มี PBD(3n+1) ที่ประกอบด้วยบล็อกที่มีขนาดเท่ากับ 4, 7, 10 หรือ 19 เสมอ สำหรับทุกจำนวนนับ n [5]

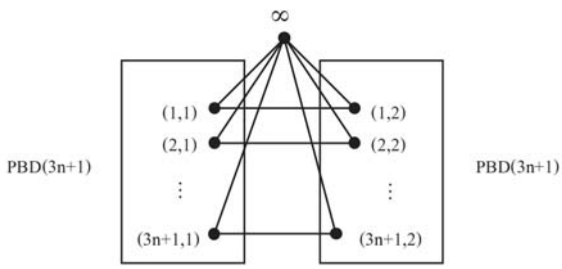
สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน [5]

ทฤษฎีบท 5 ถ้ามี PBD(3n+1) ที่ประกอบด้วยบล็อกที่มีขนาดเท่ากับ $k_1, k_2, \ldots , k_x$ และมี KTS(2ki+1) สำหรับ $1 \leq i \leq x$ แล้วจะมี KTS(6n+3) เสมอ [5]

บทพิสูจน์ ให้ $(\mathcal{R},\mathcal{B})$ เป็น PBD(3n+1) โดยที่ $\mathcal{R} = \{1, 2, \ldots , 3n+1\}$

เราสร้าง KTS(6n+3) $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ โดยให้ $\mathcal{S} = \{\infty\} \cup (\mathcal{R} \times \{1, 2\})$ และกำหนดให้ $\mathcal{T}$ เป็นเซตของบล็อกใน $\mathcal{S}$ ที่ประกอบด้วยบล็อก 2 ประเภท ดังต่อไปนี้

บล็อกประเภทที่ 1: บล็อก $\{\infty, (i,1), (i,2)\}$ เมื่อ $1 \leq i \leq 3n+1$



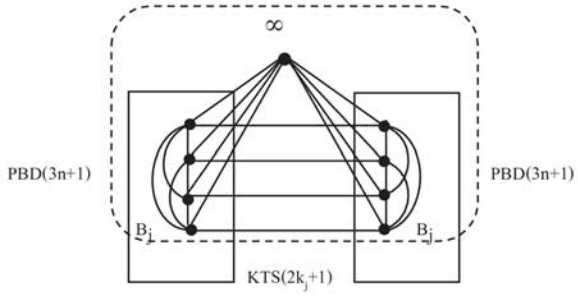
ภาพที่ 7 บล็อกประเภทที่ 1

บล็อกประเภทที่ 2: สำหรับแต่ละบล็อก $B_j \in$ โดยที่ $|Bj| = kj$ $(1 \leq j \leq x)$ จะนำ B_j มาสร้าง $KTS(2k_j+1)$ $(\mathcal{S}(B_j),\mathcal{T}(B_j))$ โดยที่

$\mathcal{S}(B_j) = \{\infty\} \cup (B_j \times \{1, 2\})$

และ $\mathcal{T}(B_j)$ เป็นเซตของบล็อกขนาด 3 ใน $KTS(2k_j+1)$ ที่บรรจุบล็อก $\{\infty, (i,1), (i,2)\}$ สำหรับทุก $i \in B_j$

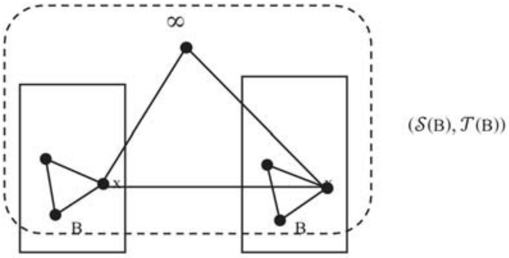
ให้ $(B_j) - \{\{\infty, (i,1), (i,2)\} \mid i \in B_j\} \subseteq \mathcal{T}$



ภาพที่ 8 บล็อกประเภทที่ 2

จะเห็นว่า $\mathcal{T}$ เป็นเซตของบล็อกขนาด 3 ของ S และสมาชิกทุกคู่ปรากฏร่วมกันในบล็อก 1 บล็อก ดังนั้น $(S, \mathcal{T})$ เป็น STS(6n+3)

ต่อมาเราจะแสดงว่า $(S, \mathcal{T})$ สามารถแบ่งกั้นเป็นชั้นขนานได้



ภาพที่ 9 KTS(2|B|+1 ของแต่ละบล็อก B $\in \mathcal{B}_x$

สำหรับสมาชิก x ใน PBD(3n+1) ใด ๆ ($1 \leq x \leq 3n+1$) ให้ $\mathcal{B}_x$ เป็นเซตของบล็อกทั้งหมดใน PBD(3n+1) ที่บรรจุ x

สังเกตว่าสำหรับแต่ละบล็อก B $\in \mathcal{B}_x$ จะมี ((B), (B)) เป็น KTS(2|B|+1) เสมอ

ให้ $\mathcal{P}_x$(B) เป็นชั้นขนานใน $\mathcal{T}$(B) ที่บรรจุบล็อก {∞, (x,1), (x,2)}

ดังนั้นจะได้ว่า $\pi_x = \mathrm{U}_{x \in \mathcal{B}x}\, \mathcal{P}_x$(B) เป็นชั้นขนานของ STS(6n+3) (สังเกตว่าบล็อก {∞, (x,1), (x,2)} จะถูกนับเพียง 1 ครั้งเท่านั้น) นั่นคือ $(S, \mathcal{T})$ เป็น KTS(6n+3) ตามต้องการ

ตัวอย่าง 8 [การสร้าง KTS(27)] กำหนดให้ $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ เป็นแผนแบบสมดุลทุกคู่ขนาด 13 โดยที่ $\mathcal{P}$ = {1, 2, ... , 13} และ $\mathcal{B}$ = { {i, i+1, i+3, i+9} | $0 \leq i \leq 13$ } เมื่อผลบวกทั้งหมดเป็นจำนวนเต็มในมอดูโล 13

เนื่องจากเราทราบว่า มี KTS(9) ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5 เราสามารถสร้าง KTS(27) ได้ ดังนี้

ให้ S = {∞} ∪ ({1, 2, ... , 13} x {1,2}) ดังนั้น |S = 27

และ เป็นเซตของบล็อกที่ประกอบด้วยบล็อก 2 ประเภท ดังนี้

บล็อกประเภทที่ 1: บล็อก {∞, (i,1), (i,2)} สำหรับ $1 \leq i \leq 13$

บล็อกประเภทที่ 2: สำหรับแต่ละบล็อก B $\in \mathcal{B}$ จะเห็นว่า |B| = 4 เราสามารถสร้างระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนขนาด 9 ($\mathcal{S}$(B), $\mathcal{T}$(B)) ได้ โดยที่ $\mathcal{S}$(B) = {∞} ∪ (B x {1, 2}) และเราสามารถแทนสมาชิกใน $\mathcal{S}$(B) ลงในสัญลักษณ์ที่ใช้ใน KTS(9) โดย ถ้า B = {i, j, k, l} เมื่อ i < j < k < l เราจะแทนสัญลักษณ์ 1, 2, 3, ... , 9 ด้วย ∞, (i,1), (i,2), (j,1), (k,1), (l,1), (j,2), (l,2) และ (k,2) ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น ถ้า B = {1, 2, 4, 10} เราจะแทน 1, 2, 3, ... , 9 ด้วย ∞, (1,1), (1,2), (2,1), (4,1), (10,1), (2,2), (10,2) และ (4,2) ตามลำดับ ลงใน KTS(9) และจะได้บล็อกขนาด 3 ทั้งหมด 12 บล็อก ได้แก่

{∞, (1,1), (1,2)}	{∞, (2,1), (2,2)}	{(2,1), (4,1), (10,1)}	{(1,1), (4,1), (10,2)}
{(2,2), (10,2), (4,2)}	{(1,2), (10,1), (4,2)}	{∞, (4,1), (4,2)}	{∞, (10,1), (10,2)}
{(1,1), (10,1), (2,2)}	{(1,1), (2,1), (4,2)}	{(1,2), (2,1), (10,2)}	{(1,2), (4,1), (2,2)}

จากนั้นเราตัดบล็อก {∞, (i,1), (i,2)} ออกสำหรับทุก i ดังนั้น สำหรับแต่ละบล็อก B $\in \mathcal{B}$ เราจะได้บล็อกขนาด 3 ทั้งหมด 8 บล็อก

ดำเนินการเช่นนี้กับทุกบล็อก B $\in \mathcal{B}$ จากนั้นนำบล็อกทั้งหมดที่ได้มารวมกัน เราจะได้บล็อกขนาด 3 ที่แตกต่างกันทั้งหมด 104 บล็อก เมื่อรวมกับบล็อกชนิดที่ 1 แล้ว เราจะได้ $\mathcal{T}$ เป็นเซตของบล็อกขนาด 3 โดยที่ $|\mathcal{T}|$ = 117 ตามต้องการ นั่นคือ $(S,\mathcal{T})$ เป็น STS(27) นั่นเอง

ในการหาชั้นขนานของ STS(27) นั้น เราพิจารณาดังตัวอย่างต่อไปนี้

สมมติว่าเราต้องการหาชั้นขนาน π_4 เราจะเริ่มจากการหาเซต B_4 ซึ่งเป็นเซตของบล็อกทั้งหมดใน PBD(13) ที่บรรจุสมาชิก 4 อยู่ จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า

$\mathcal{B}_4$ = { {1, 2, 4, 10}, {3, 4, 6, 12}, {4, 5, 7, 13}, {4, 8, 9, 11} }

สำหรับแต่ละบล็อก B $\in \mathcal{B}_4$ เราหาชั้นขนาน $\mathcal{P}_4$(B) ใน $\mathcal{T}$(B) ที่บรรจุบล็อก {∞,(4,1),(4,2)} จะได้

B_1 = {1, 2, 4, 10} $\Longrightarrow$ (B_1) = { {∞, (4,1), (4,2)}, {(1,1), (10,1), (2,2)}, {(1,2), (2,1), (10,2) }

B_2 = {3, 4, 6, 12} $\Longrightarrow$ (B_2) = { {∞, (4,1), (4,2)}, {(3,1), (6,1), (12,2)}, {(3,2), (12,1), (6,2)} }

B_3 = {4, 5, 7, 13} $\Longrightarrow$ (B_3) = { {∞, (4,1), (4,2)}, {(5,1), (7,1), (13,1)}, {(5,2), (13,2), (7,2)} }

B_4 = {4, 8, 9, 11} $\Longrightarrow$ (B_4) = { {∞, (4,1), (4,2)}, {(8,1), (9,1), (11,1)}, {(8,2), (9,1), (11,2)} }

ดังนั้น $\pi_4 = \mathcal{P}_4(B_1) \cup \mathcal{P}_4(B_2) \cup \mathcal{P}_4(B_3) \cup \mathcal{P}_4(B_4)$ และเห็นได้ว่าบล็อก {∞, (4,1), (4,2)} จะถูกนับเพียงครั้งเดียวเท่านั้น

จากทฤษฎีบท 5 จะเห็นว่า หากเรามีระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนขนาดใด ๆ เราจะสามารถสร้างระบบสามสิ่งของเคิร์กแมนที่ขนาดใหญ่ขึ้นได้ ซึ่งในการแสดงว่ามี KTS(6n+3) สำหรับทุกจำนวนนับ n นั้น เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่ามี KTS(2k+1) เมื่อ k = 4, 7, 10 และ 19 นั่นคือ แสดงว่ามี KTS(v) เมื่อ v = 9, 15, 21 และ 39 นั่นเอง

ทฤษฎีบท 6 มี KTS(6n+3) สำหรับทุกจำนวนนับ n [5]

บทพิสูจน์ สำหรับ KTS(9) และ KTS(15) นั้นเราได้แสดงให้เห็นแล้วจากตัวอย่าง 5 และตัวอย่าง 6 ตามลำดับ

ชั้นขนาน 10 ชั้นต่อไปนี้เป็นชั้นขนานสำหรับ KTS(21)

ตารางที่ 2 ชั้นขนานสำหรับ KTS(21)

π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12	13 14 15
4 7 13	7 10 16	10 13 19	1 13 16	4 16 19
5 8 14	8 11 27	11 14 20	12 14 20	5 17 20
6 9 15	9 12 18	12 15 21	3 15 18	6 18 21
10 17 21	3 13 20	2 6 16	5 9 19	1 8 12
11 18 19	1 14 21	3 4 17	6 7 20	2 9 10
12 16 20	2 15 19	1 5 18	4 8 21	3 7 11
π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}
16 17 18	19 20 21	10 18 20	11 16 21	12 17 19
1 7 19	1 4 10	2 13 21	3 14 19	1 15 20
2 8 20	2 5 11	3 5 16	1 6 17	2 4 18
3 9 21	3 6 12	6 8 19	4 9 20	5 7 21
4 11 15	7 14 18	1 9 11	2 7 12	3 8 10
5 12 13	8 15 16	4 12 14	5 10 15	6 11 13
6 10 14	9 13 17	7 15 17	8 13 18	9 14 16

ชั้นขนาน 19 ชั้นต่อไปนี้เป็นชั้นขนานสำหรับ KTS(39)

π = { {0+3i, 1+3i, 2+3i}, {3+3i, 9+3i, 27+3i}, {4+3i, 10+3i, 28+3i}, {5+3i, 11+3i, 29+3i}, {6+3i, 15+3i, 18+3i}, {7+3i, 16+3i, 19+3i}, {8+3i, 17+3i, 20+3i}, {12+3i, 31+3i, 38+3i}, {13+3i, 32+3i, 36+3i}, {14+3i, 30+3i, 37+3i}, {21+3i, 25+3i, 35+3i}, {22+3i, 26+3i, 33+3i}, {23+3i, 24+3i, 34+3i} } (สำหรับ $1 \leq i \leq 13$)

π_{14} = { {12+3i, 32+3i, 37+3i} | $0 \leq i \leq 12$ }, π_{15} = { {13+3i, 30+3i, 0+3i} | $0 \leq i \leq 12$ },

π_{16} = { {14+3i, 31+3i, 36+3i} | $0 \leq i \leq 12$ }, π_{17} = { {21+3i, 26+3i, 34+3i} | $0 \leq i \leq 12$ },

π_{18} = { {22+3i, 24+3i, 35+3i} | $0 \leq i \leq 12$ }, π_{19} = { {23+3i, 25+3i, 33+3i} | $0 \leq i \leq 12$ }

เมื่อผลบวกทั้งหมดเป็นจำนวนเต็มในในมอดูโล 39

การจัดแบบอื่น ๆ

ยังมีปัญหาการเกี่ยวกับการจัดสมาชิกในเซตจำกัดแบบต่าง ๆ อีกมากมายที่นักคณิตศาสตร์สนใจและศึกษามาอย่างยาวนาน ตัวอย่างเช่น การจัดเซตของสมาชิกให้เป็นกลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มอาจมีขนาดไม่เท่ากัน, การจัดสมาชิกให้เป็นกลุ่ม โดยที่สมาชิกทุกคู่พบกันมากกว่า 1 ครั้ง หรือการจัดเซตของสมาชิกโดยมีเงื่อนไขว่าให้

สมาชิกบางคู่ไม่พบกันเลย เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้เป็นปัญหาที่ได้รับการศึกษามาอย่างยาวนานในวงการคณิตศาสตร์สาขาแผนแบบเชิงการจัด (combinatorial design)

4. บทสรุป

ปัญหาการจัดสมาชิกในเซตจำกัดตามเงื่อนไขต่าง ๆ เป็นปัญหาที่นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษามาอย่างยาวนาน และมีการพิสูจน์วิธีจัดสมาชิกบางรูปแบบไว้แล้วมากมาย ปัญหาการจัดกิจกรรมแนะนำตัวของสมาชิกใหม่หอการค้าเยอรมัน – ไทยก็ถือเป็นกรณีหนึ่งของปัญหาการจัดที่ได้รับการพิสูจน์แล้ว สำหรับการจัดการพบปะแบบเป็นคู่นั้นสามารถทำได้เสมอ ไม่ว่าจำนวนสมาชิกจะมีค่าเป็นเท่าใดก็ตาม (หากเป็นจำนวนคี่จะมีสมาชิก 1 บริษัทที่ไม่ได้พบปะกับใครในแต่ละรอบ) ส่วนการจัดการพบปะแบบกลุ่มละ 3 บริษัทนั้นจะสามารถทำได้ก็ต่อเมื่อจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนคี่ที่หารด้วย 3 ลงตัว อย่างไรก็ตาม หากจำนวนสมาชิกที่มีไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวก็ยังมีวิธีการจัดแบบอื่น ๆ ที่อาจใช้ได้อีกด้วย ตัวอย่างเช่น หากเรายอมให้มีสมาชิกบางคู่ได้พบปะกันมากกว่า 1 ครั้ง หรือยอมให้มีสมาชิกบางคู่ที่ไม่ได้พบปะกันเลย กรณีเช่นนี้เราสามารถใช้ความรู้เรื่อง maximum packing และ minimum covering มาช่วยในการจัดการพบปะได้ ซึ่งวิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการที่มีผลเฉลยอย่างสมบูรณ์แล้วด้วย

เอกสารอ้างอิง

[1] N. Barnier and P. Brisset, “Solving the Kirkman’s schoolgirl problem in a few seconds,” In Proceedings of the 8th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, 2002.

[2] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd ed, New York: Chapman and Hall/CRC, 2006.

[3] German – Thai Chamber of Commerce, *Annual Report*. Bangkok: German – Thai Chamber of Commerce, 2015.

[4] X. Y. Li, Z. D. Xu and W. X. Chou, “A new method of constructing Kirkman triple system,” In Proceedings of the 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). (pp. 4237–4242). Beijing: IEEE Conference Publications, 2011.

[5] C. C. Lindner and C. A. Rodger, *Design Theory*. New York: Chapman and Hall/CRC, 1997.

[6] D. K. Ray-Chaudhuri and R.M. Wilson, “Solution of Kirkman’s school-girl problem” *Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math*., **19**, 187–204, 1971.

[7] D. R. Stinson and S. A. Vanstone, “Some non-isomorphic Kirkman triple systems of orders 39 and 51” *Utilitas Math*., **27**, 199–205, 1985.

[8] W. D. Wallis, *Introduction to Combinatorial Designs*. 2nd ed, New York: Chapman and Hall/CRC, 2007.

[9] E. W. Weisstein, Kirkman's Schoolgirl Problem [Online]. Available: http://mathworld.wolfram.com/KirkmansSchoolgirlProblem.html