ฟังก์ชันเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมอบิอุสนัยทั่วไป
Arithmetic Functions Related to Generalized Möbius Functions

นิตติยา ปภาพจน์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

ดินแดง กรุงเทพมหานคร 10400

Nittiya Pabhapote

School of Science and Technology

University of the Thai Chamber of Commerce, Dindaeng, Bangkok 10400

E-mail: nittiya_pab@utcc.ac.th

บทคัดย่อ

ผู้วิจัยได้ศึกษาฟังก์ชันเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมอบิอุสนัยทั่วไป, μ_α โดยศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันออยเลอร์-ฟีนัยทั่วไป, $\phi_{s,\alpha}$ นิยามโดย

$$\phi_{s,\alpha}(n) = \sum_{d|n} d^s \mu_\alpha\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (s \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C})$$

ซึ่งสมบัติต่างๆ ที่ศึกษาประกอบด้วย

1. สร้างเอกลักษณ์ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ กับ ฟังก์ชัน σ_s โดยที่

   $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s \ (s \in \mathbb{R})$ ซึ่งนิยามโดย Toth

2. ใช้ฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ ในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ซึ่งเป็นการขยายผลงานวิจัยของ Sivaramakrishnan

คำสำคัญ: ฟังก์ชันเลขคณิต ฟังก์ชันเมอบิอุสนัยทั่วไป ฟังก์ชันออยเลอร์–ฟีนัยทั่วไป

Abstract

In this paper, arithmetic functions related to generalized Möbius functions are studied. In particular, we investigate several properties of a generalized Euler's phi function, defined as

$$\phi_{s,\alpha}(n)=\sum_{d|n} d^s \mu_\alpha\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (s\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{C})$$

including

1. identities relating to the divisor function extending those proved by Toth,

$$\sigma_s(n)=\sum_{d|n} d^s \ (s\in\mathbb{R})$$

2. a use to characterize completely multiplicative functions extending the one by Sivaramakrisnan.

Keywords: arithmetic functions, generalized Möbius functions, generalized Euler's phi function

1. บทนำ

ฟังก์ชันเลขคณิต (Arithmetic functions) คือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ฟังก์ชันเลขคณิตที่สำคัญที่จะใช้เป็นพื้นฐานของการศึกษาผลงานวิจัยครั้งนี้คือ

(1) ฟังก์ชัน μ เรียกว่า *ฟังก์ชันเมอบิอุส* (Möbius function) [1] นิยามโดย

$\mu(n) = 1$ ถ้า $n = 1$,

$\mu(n) = 0$ ถ้ามีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p^2 \mid n$,

$\mu(n) = (-1)^k$ ถ้า $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

(2) ฟังก์ชัน ϕ เรียกว่า *ฟังก์ชันออยเลอร์-ฟี* (Euler ϕ - function) [1] นิยามโดย

$\phi(n) =$ จำนวนของจำนวนเต็มบวก $k \le n$ และ $(k, n) = 1$

เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปว่าฟังก์ชัน μ และฟังก์ชัน ϕ มีความสัมพันธ์กันในรูปแบบของเอกลักษณ์ดังต่อไปนี้

$$\phi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ผลบวก ผลต่าง ผลคูณสามัญ และผลคูณดีริคเลต (Dirichlet product) หรือ *ผลประสาน* (Convolution) ของฟังก์ชันเลขคณิต f, g กำหนดความหมายตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned}
(f+g)(n) &= f(n) + g(n) \\
(f-g)(n) &= f(n) - g(n) \\
(f \cdot g)(n) &= f(n) \cdot g(n) \\
(f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)
\end{aligned}$$

ฟังก์ชัน I เรียกว่า *ฟังก์ชันเอกลักษณ์* (Identity funtion) เทียบกับผลประสาน [1] นิยามโดย

$$I(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

สำหรับฟังก์ชันเลขคณิต f ที่ $f(1) \neq 0$ ฟังก์ชัน f^{-1} [1] นิยามโดย

$f * f^{-1} = f^{-1} * f = I$ นั่นคือ

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}, f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d), \ n > 1$$

ฟังก์ชันนี้ เรียกว่า *ฟังก์ชันผกผัน* (Inverse) ของ f ภายใต้ผลประสาน

ให้ $\mathbb{A}$ แทนเซตของฟังก์ชันเลขคณิต ในปี 1959 Cashwell and Everett [3] ได้พิสูจน์ว่า $(\mathbb{A}, +, *)$ เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม (Integral domain) ซึ่งเป็นโดเมนที่มีการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียว (Unique factorization domain) แต่ไม่เป็นโดเมนยุคลิด (Euclidean domain) ซึ่งสอดคล้องกับผลงานของ Shapiro [19]

Apositol [1], Shapiro [19] and Haukkanen [4] ได้กล่าวถึงความหมายของ *ฟังก์ชันแยกคูณ* (multiplicative function) และ *ฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์* (completely multiplicative function) ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิต จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณ ก็ต่อเมื่อ $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n ซึ่ง $(m, n) = 1$ และ f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับทุกเป็นจำนวนเต็มบวก m และ n

ให้ $\mathcal{M}$ แทนเซตของฟังก์ชันแยกคูณ และให้ $\mathcal{C}$ แทนเซตของฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ฟังก์ชันแยกคูณที่สำคัญยิ่งฟังก์ชันหนึ่งที่มีผู้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ไว้มากมาย และมีผลงานวิจัยที่ผลิตออกมาอย่างต่อเนื่อง คือ *ฟังก์ชันเมอบิอุสนัยทั่วไป* (generalized Möbius functions), μ_α ซึ่งผู้ที่ให้นิยามฟังก์ชัน μ_α คนแรกคือ J. M. Souriau [21] เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ให้นิยามคนแรก เราจะเรียกฟังก์ชันดังกล่าวนี้ว่า The Souriau–Hsu–Möbius function หรือ เขียนย่อ ๆ ว่า SHM-function กำหนดโดย

$$\mu_\alpha(n) = \prod_{p|n} \binom{\alpha}{\upsilon_p(n)} (-1)^{\upsilon_p(n)} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

เมื่อ $\upsilon_p(n)$ คือเลขชี้กำลังสูงสุดของจำนวนเฉพาะ p ที่หาร n ลงตัว โดยที่ $\mu_1 = \mu$

ในปี 2000 T. C. Brown, L. C. Hsu, J. Wang and P. J. –S. Shiue ได้ศึกษาสมบัติของฟังก์ชัน μ_α อย่างเป็นระบบโดยศึกษารายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [2] และ Haukkanen ก็เป็นนักวิจัยอีกท่านหนึ่งที่ศึกษาและค้นพบข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน μ_α ศึกษารายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [5], [6], [7], [8], [9] และ [10]

ในปี 2002 ถึงปี 2005 Laohakosol and Pabhapote ได้สร้างผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน μ_α จำนวน 5 เรื่อง ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [11], [12], [13], [14], และ [16] สมบัติและเอกลักษณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน μ_α ยังมีอีกมากมายที่จะให้เราศึกษาและค้นคว้าโดยเฉพาะอย่างยิ่งสมบัติและเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับ*ฟังก์ชันออยเลอร์-ฟีนัยทั่วไป* (generalized Euler's phi function), $\phi_{\mu_r}^{(k)}$ ซึ่ง Wang and Hsu [24] ได้กำหนดความหมายของฟังก์ชัน $\phi_{\mu_r}^{(k)}$ ดังนี้

$$\phi_{\mu_r}^{(k)}(n) = \sum_{d|n} d^k \mu_r\left(\frac{n}{d}\right) \quad (k, r \in \mathbb{N})$$

และ Wang and Hsu ยังได้พิสูจน์ว่า

$$\phi_{\mu_r}^{(k)}(n) = \sum_{d|n} d^k \mu_r\left(\frac{n}{d}\right) = n^k \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right)^r$$

เมื่อ n คือ $r-powerful$ ซึ่งความหมายของ $r-powerful$ คือ $\upsilon_p(n)\geq r$ สำหรับทุกจำนวนจำนวนเฉพาะ p ที่หาร n ลงตัว

จากการศึกษาผลงานวิจัยของ Wang and Hsu ทำให้ผู้วิจัยกำหนดความหมายของฟังก์ชัน $\phi_{\mu_r}^{(k)}$ ในรูปทั่วไปมากกว่า กล่าวคือ

$$\phi_{s,\alpha}(n):=(\zeta_s*\mu_\alpha)(n)=\sum_{d|n}d^s\mu_\alpha\left(\frac{n}{d}\right)\qquad(\alpha\in\mathbb{C},s\in\mathbb{R})$$

เมื่อ $\zeta_s(n)=n^s$ และจะเรียกฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ ย่อ ๆ ว่า GET (Generalized Euler totient) และจะเขียน ϕ_α แทน $\phi_{1,\alpha}$ ยิ่งไปกว่านั้นฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ ยังมีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่เป็นที่รู้จักกันทั่วไปในอดีตอันยาวนานมาแล้ว กล่าวคือ

$\phi_{1,1}=\zeta*\mu=\phi$ (the classical Euler totient)

$\phi_{s,1}=\zeta_s*\mu=J_s$ (the Jordan totient)

$\phi_{0,-1}=u*u=\sigma_0$ (the number of divisor)

$\phi_{s,-1}=\zeta_s*u=\sigma_s$ (the sum of the sth power of divisors)

$\phi_{s,1}(n)=(\zeta_s*\mu)(n)=\Phi_s(n^s)$ (Klee' s totient)

นอกจากนี้ สมบัติและเอกลักษณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ ยังมีอีกมากมายซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดได้ในเอกสารอ้างอิงหมายเลข [1], [9] และ [24]

จากการศึกษาผลงานวิจัยต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจจะศึกษาฟังก์ชันเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน μ_α ทำให้พบสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ ดังนี้

1. เอกลักษณ์ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ กับ σ_s ซึ่งกำหนดความหมายโดย Toth [22],

$$\sigma_s(n)=\sum_{d|n}d^s\ (s\in\mathbb{R})$$

2. เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ โดยใช้ฟังก์ชัน ϕ_α ซึ่งเป็นการขยายผลงานวิจัยของ Sivaramakrishnan [20]

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐานของการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเลขคณิตที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมอบิอุสนัยทั่วไป มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ในปี 1897 Sivaramakrishnan ได้พิสูจน์ว่า ฟังก์ชันแยกคูณ f จะเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $f\phi = f\zeta * f^{-1}$

ในปี 1976 Apostol [1] ได้กล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ของฟังก์ชันเลขคณิต กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $\mu f^{-1} = \mu^{-1} f = \mu_{-1} f$

ในปี 1997 Haukkanen [8] ได้พิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า $f^{\alpha} = \mu_{-\alpha} f$ โดยที่ Rearick [18] ได้ให้ความหมายของ f^{α} ดังนี้

$$f^{\alpha} = \underbrace{f * \cdots * f}_{\alpha \quad times} \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

$$f^{\alpha} = \operatorname{Exp}(\alpha \operatorname{Log} f) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

เมื่อ Exp และ Log เรียกว่า ตัวดำเนินการของ Rearick ([17], [18])

ในปี 2000 Brown, Hsu, Wang and Shiue [2] ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาฟังก์ชัน μ_{α} ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $\alpha \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า μ_{α} เป็นฟังก์ชันแยกคูณ

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $\mu_{\alpha} * \mu_{\beta} = \mu_{\alpha+\beta}$

ต่อมาในปี 2002 Laohakosol, Pabhapote and Wechwiriyakul [11] ได้ขยายผลการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ของฟังก์ชันเลขคณิต โดยการเปลี่ยนจากฟังก์ชัน μ เป็นฟังก์ชัน μ_{α} และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทกลับของ Haukkanen [8] ซึ่งได้ผลงานวิจัยออกมาดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $f \in \mathcal{M}$ โดยที่ f ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $\mu_{\alpha} f^{-1} = \mu^{-\alpha} f = \mu_{-\alpha} f$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ $f \in \mathcal{M}$ โดยที่ f ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ สมมติเงื่อนไข (NE) เป็นจริง ถ้า $f^{\alpha} = \mu_{-\alpha} f$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ในที่นี้เงื่อนไข (NE) คือข้อความ "ถ้า α เป็นจำนวนเต็มคู่ลบแล้วจะสมมติว่า $f(p^{-\alpha-1}) = f(p)^{-\alpha-1}$ สำหรับแต่ละจำนวนเฉพาะ p"

จากผลงานวิจัยที่กล่าวข้างต้นทำให้ผู้วิจัยมีความประสงค์จะหาเงื่อนที่จำเป็นและเพียงพอในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ โดยใช้ฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$

ต่อไปจะขอกล่าวถึงเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน μ_{α} ซึ่งเป็นที่รู้จักแพร่หลาย คือ

$$\sum_{d|r} \frac{\mu(d)^{2}}{\phi(d)} = \frac{r}{\phi(r)} \qquad r \in \mathbb{N} \tag{1}$$

เรียกเอกลักษณ์ (1) ว่า *Landau identity* ([8], [25])

$$\phi(r) \sum_{\substack{d|r \\ (d,n)=1}} \frac{d}{\phi(d)} \mu \ \frac{r}{d} \ = \mu(r) \sum_{d|(n,r)} d\mu \ \frac{r}{d} \qquad r, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

เรียกเอกลักษณ์ (2) ว่า *Brauer-Rademacher identity* ([6], [16])

ในปี 2005 Pabhapote, Laohakosol, and Ruengsinsub [16] ได้ศึกษาเอกลักษณ์ดังกล่าวข้างต้น โดยขยายผลไปสู่การศึกษาฟังก์ชัน μ_α แทนฟังก์ชัน μ

3. ผลงานวิจัย

ผลงานวิจัยนี้จะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันออยเลอร์-ฟีนัยทั่วไป ซึ่งจะมี 2 หัวข้อ ดังนี้

3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$ กับฟังก์ชัน σ_s

ในปี 1997 Toth [23] ได้พิสูจน์เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน ϕ_s ซึ่งผู้วิจัยจะศึกษากรณีทั่วไปของเอกลักษณ์ของ Toth โดยจะศึกษาเอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน $\phi_{s,\alpha}$

ทฤษฎีบทนำ 3.1 สำหรับ $s \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{N}$ และจำนวนเฉพาะ p จะได้ว่า

$$\mu_\alpha(p^a) = \phi_{s,\alpha}(p^a) - p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})$$

บทพิสูจน์ จากความหมายของ $\phi_{s,\alpha}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi_{s,\alpha}(p^a) &= \sum_{d|p^a} d^s\mu_\alpha\left(\frac{p^a}{d}\right) \\ &= \mu_\alpha(p^a) + p^s\mu_\alpha(p^{a-1}) + p^{2s}\mu_\alpha(p^{a-2}) + \cdots + p^{as}\mu_\alpha(1) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) &= p^s \sum_{d|p^{a-1}} d^s\mu_\alpha\left(\frac{p^{a-1}}{d}\right) \\ &= p^s[\mu_\alpha(p^{a-1}) + p^s\mu_\alpha(p^{a-2}) + \cdots + p^{(a-1)s}\mu_\alpha(1)] \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mu_\alpha(p^a) = \phi_{s,\alpha}(p^a) - p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

ถ้า $f_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ ที่นิยามโดย

$f_{s,\alpha}(1) = 1$ และ

$$f_{s,\alpha}(p^a) = \begin{cases} p^s(1-\alpha) - \alpha & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \sigma_s(p^a)\mu_\alpha(p^a) + p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกจำนวนเต็มบวก α จะได้ว่า

$$\sigma_s(n)\phi_{s,\alpha}(n) \;=\; \sum_{d|n} f_{s,\alpha}(d)(\frac{n}{d})^{2s} \qquad \left(n\in\mathbb{N}\right) \tag{3}$$

บทพิสูจน์ โดยสูตรการผกผันเมอบิอุส จะได้ว่าเอกลักษณ์ (3) สมมูลกับ

$$f_{s,\alpha}(n) \;=\; \sum_{d|n} \sigma_s(d)\phi_{s,\alpha}(d)(\frac{n}{d})^{2s}\mu(\frac{n}{d})$$

กำหนดให้

$$F(n) \;:=\; \sum_{d|n} \sigma_s(d)\phi_{s,\alpha}(d)(\frac{n}{d})^{2s}\mu(\frac{n}{d})$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า F เป็นฟังก์ชันแยกคูณ

ฉะนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะตรวจสอบในกรณีที่ $n = p^a$ และเราจะได้

$$F(p^a) \;=\; \sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^a) - p^{2s}\sigma_s(p^{a-1})\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})$$

ถ้า $a = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} F(p) &= \sigma_s(p)\phi_{s,\alpha}(p) - p^{2s} \\ &= (1 + p^s)(\mu_\alpha(p) + p^s) - p^{2s} \;=\; p^s(1-\alpha) - \alpha \end{aligned}$$

ถ้า $a > 1$ จะได้

$$F(p^a) \;=\; \sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^a) - p^s(p^s + p^{2s} + \cdots + p^{as})\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(p^a) &= \sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^a) - p^s\sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) + p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) \\ &= \sigma_s(p^a)\mu_\alpha(p^a) + p^s\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) \\ &= f_{s,\alpha}(p^a) \end{aligned}$$

เพราะว่าทั้ง F และ $f_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ จึงได้ว่า $F = f_{s,\alpha}$

เพราะฉะนั้นเราได้ทฤษฎีบท 3.2 ตามต้องการ □

บทแทรกต่อไปนี้ รู้จักกันเป็นอย่างดีใน [23] ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของรูปแบบทั่วไปในทฤษฎีบท 3.2

บทแทรก 3.3 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ และ จะได้ว่า

$$\sigma_s(n)\phi_s(n) \;=\; \sum_{d|n} f_s(d)(\frac{n}{d})^{2s}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่

$$f_s(p^a) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \phi_s(p^a) & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกจำนวนเต็มบวก a

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

ถ้า $g_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ ที่นิยามโดย

$g_{s,\alpha}(1) = 1$ และ

$$g_{s,\alpha}(p^a) = \begin{cases} \dfrac{1+\alpha}{\phi_{s,\alpha}(p)} & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \\ \dfrac{\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) - \sigma_s(p^{a-1})\mu_\alpha(p^a)}{\phi_{s,\alpha}(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})} & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกจำนวนเต็มบวก a จะได้ว่า

$$\frac{\sigma_s(n)}{\phi_{s,\alpha}(n)} = \sum_{d|n} g_{s,\alpha}(d) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

บทพิสูจน์ โดยสูตรการผกผันเมอบิอุส จะได้ว่าเอกลักษณ์ (4) สมมูลกับ

$$g_{s,\alpha}(n) = \sum_{d|n} \frac{\sigma_s(d)}{\phi_{s,\alpha}(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

กำหนดให้

$$G(n) := \sum_{d|n} \frac{\sigma_s(d)}{\phi_{s,\alpha}(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า G เป็นฟังก์ชันแยกคูณ

ฉะนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะตรวจสอบในกรณีที่ $n = p^a$ และเราจะได้

$$G(p^a) = \frac{\sigma_s(p^a)}{\phi_{s,\alpha}(p^a)} - \frac{\sigma_s(p^{a-1})}{\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})}$$

ถ้า $a = 1$ จะได้ $G(p) = \dfrac{\sigma_s(p)}{\phi_{s,\alpha}(p)} - \dfrac{\sigma_s(1)}{\phi_{s,\alpha}(1)}$

$$= \frac{1 + p^s - \mu_\alpha(p) - p^s}{\phi_{s,\alpha}(p)} = \frac{1+\alpha}{\phi_{s,\alpha}(p)}$$

ถ้า $a > 1$ จะได้ $G(p^a) = \dfrac{\sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) - \sigma_s(p^{a-1})\phi_{s,\alpha}(p^a)}{\phi_{s,\alpha}(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})}$

และเราได้ $$G(p^a) = \frac{\phi_{s,\alpha}(p^{a-1}) - \sigma_s(p^{a-1})\mu_\alpha(p^a)}{\phi_{s,\alpha}(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})} = g_{s,\alpha}(p^a)$$

เพราะว่าทั้ง G และ $g_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ จึงได้ว่า $G = g_{s,\alpha}$
เพราะฉะนั้นเราได้ทฤษฎีบท 3.4 ตามต้องการ

บทแทรกต่อไปนี้ เป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดีใน [23] เป็นกรณีพิเศษของรูปแบบทั่วไปในทฤษฎีบท 3.4

บทแทรก 3.5 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\frac{\sigma_s(n)}{\phi_s(n)} = \sum_{d|n} g_s(d)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่

$$g_s(p^a) = \begin{cases} \dfrac{2}{\phi_s(p)} & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \dfrac{1}{\phi_s(p^a)} & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกจำนวนเต็มบวก a

ทฤษฎีบท 3.6 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ และ $\alpha \in \mathbb{C}$

ถ้า $h_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ ที่นิยามโดย
$h_{s,\alpha}(1) = 1$ และ

$$h_{s,\alpha}(p^a) = \begin{cases} \dfrac{-1-\alpha}{p^s+1} & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \dfrac{(p^s-1)^2[\sigma_s(p^{a-1})\mu_\alpha(p^a) - \phi_{s,\alpha}(p^{a-1})]}{(p^{(a+1)s}-1)(p^{as}-1)} & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และทุกจำนวนเต็มบวก a จะได้ว่า

$$\frac{\phi_{s,\alpha}(n)}{\sigma_s(n)} = \sum_{d|n} h_{s,\alpha}(d) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

บทพิสูจน์ โดยสูตรการผกผันเมอบิอุส จะได้ว่าเอกลักษณ์ (5) สมมูลกับ

$$h_{s,\alpha}(n) = \sum_{d|n} \frac{\phi_{s,\alpha}(d)}{\sigma_s(d)} \mu(\frac{n}{d})$$

กำหนดให้

$$H(n) := \sum_{d|n} \frac{\phi_{s,\alpha}(d)}{\sigma_s(d)} \mu(\frac{n}{d})$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า H เป็นฟังก์ชันแยกคูณ
ฉะนั้นจึงเป็นการเพียงพอที่จะตรวจสอบในกรณีที่ $n = p^a$ และเราจะได้

$$H(p^a) = \frac{\phi_{s,\alpha}(p^a)}{\sigma_s(p^a)} - \frac{\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})}{\sigma_s(p^{a-1})}$$

ถ้า $a = 1$ จะได้

$$H(p) = \frac{\phi_{s,\alpha}(p) - \sigma_s(p)}{\sigma_s(p)} = \frac{-1-\alpha}{p^s+1}$$

ถ้า $a > 1$ จะได้

$$H(p^a) = \frac{\sigma_s(p^{a-1})\phi_{s,\alpha}(p^a) - \sigma_s(p^a)\phi_{s,\alpha}(p^{a-1})}{\sigma_s(p^{a-1})\sigma_s(p^a)}$$

และเราได้

$$H(p^a) = \frac{(p^s-1)^2[\sigma_s(p^{a-1})\mu_\alpha(p^a) - \phi_{s,\alpha}(p^{a-1})]}{(p^{(a+1)s}-1)(p^{as}-1)} = h_{s,\alpha}(p^a)$$

เพราะว่าทั้ง H และ $h_{s,\alpha}$ เป็นฟังก์ชันแยกคูณ จึงได้ว่า $H = h_{s,\alpha}$

เพราะฉะนั้นเราได้ทฤษฎีบท 3.6 ตามต้องการ □

บทแทรกต่อไปนี้ เป็นที่รู้จักกันเป็นอย่างดีใน [23] เป็นกรณีพิเศษของรูปแบบทั่วไปในทฤษฎีบท 3.6

บทแทรก 3.7 กำหนด $s \in \mathbb{R}$ และ $a \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\sigma_s(n)\phi_s(n) = \sum_{d|n} h_s(d)(\frac{n}{d})^{2s}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่

$$h_s(p^a) = \begin{cases} \dfrac{-2}{p^s+1} & \text{เมื่อ } a = 1 \\ \dfrac{(p^s-1)^3 p^{(a-2)s}}{(p^{(a+1)s}-1)(p^{as}-1)} & \text{เมื่อ } a > 1 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p

3.2 ฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจะนำเสนอการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันออยเลอร์-ฟีนัยทั่วไป ในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ซึ่งเป็นการขยายผลงานวิจัยของ Sivaramakrishnan [20]

ทฤษฎีบท 3.8 กำหนด f เป็นฟังก์ชันแยกคูณ โดยที่ f ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์ และ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(i) ถ้า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ แล้ว $f\zeta * f^{-\alpha} = f\phi_\alpha$

(ii) สมมติว่า $\phi_\alpha(p^k) - \mu_\alpha(p^k) - p^k \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ และจำนวนเฉพาะ p ถ้า $f\phi_\alpha = f\zeta * f\mu_\alpha$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์

บทพิสูจน์ (i) สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปใน [8] และ [11] ว่า

$$f^{-\alpha} = f\mu_\alpha$$

โดยนิยามของ GET และ สมบัติการกระจายของฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ (ทฤษฎีบทประกอบ 1.10 ของ [17]) จะได้ว่า

$$f\phi_\alpha = f(\zeta * \mu_\alpha) = f\zeta * f\mu_\alpha = f\zeta * f^{-\alpha}$$

(ii) สมมติว่า $\phi_\alpha(p^k) - \mu_\alpha(p^k) - p^k \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ และจำนวนเฉพาะ p และกำหนดให้ $f\phi_\alpha = f\zeta * f\mu_\alpha$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันแยกคูณ

ฉะนั้นจึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $f(p^k) = [f(p)]^k$ สำหรับจำนวนเฉพาะ p และ $k \in \mathbb{N}$

เห็นได้ชัดว่ากรณีที่ $k = 1$ จะได้ว่า

$f(p^k) = [f(p)]^k$ เป็นจริง

สมมติว่า $f(p^j) = [f(p)]^j$ เป็นจริง สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, k-1$

จากสมมติฐาน จะได้

$$\begin{aligned} f(p^k)\phi_\alpha(p^k) &= \sum_{i=0}^{k} f(p^{k-i})p^{k-i}f(p^i)\mu_\alpha(p^i) \\ &= f(p^k)p^k + \sum_{i=1}^{k} f(p^{k-i})p^{k-i}f(p^i)\mu_\alpha(p^i) \end{aligned}$$

ดังนั้นจากสมมติฐานขั้นอุปนัย จะได้

$$\begin{aligned} f(p^k)[\phi_\alpha(p^k) - p^k] &= [f(p)]^k \sum_{i=0}^{k} p^{k-i}\mu_\alpha(p^i) - [f(p)]^k p^k - [f(p)]^k \mu_\alpha(p^k) \\ &\quad + f(p^k)\mu_\alpha(p^k) \end{aligned}$$

แสดงว่า

$$f(p^k)[\phi_\alpha(p^k) - \mu_\alpha(p^k) - p^k] = [f(p)]^k[\phi_\alpha(p^k) - \mu_\alpha(p^k) - p^k]$$

เพราะว่า $\phi_\alpha(p^k) - \mu_\alpha(p^k) - p^k \neq 0$ จะได้ว่า $f(p^k) = [f(p)]^k$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ □

บทแทรกต่อไปนี้ เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปใน [20] ซึ่งเป็นกรณีพิเศษ เมื่อกำหนดให้ $\alpha = 1$

บทแทรก 3.9 กำหนด f เป็นฟังก์ชันแยกคูณโดยที่ f ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์
จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $f\phi = f\zeta * f^{-1}$

บทพิสูจน์ จากข้อเท็จจริงใน [1] f เป็นฟังก์ชันแยกคูณแบบบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} = f\mu$ และจากทฤษฎีบท 3.8 เมื่อแทนค่า $\alpha = 1$ จะได้บทแทรก 3.9 ตามต้องการ □

เอกสารอ้างอิง

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Mathematics.* New York: Springer-Verlag, 1976.

[2] T. C. Brown, L. C. Hsu, J. Wang and P. J. –S. Shiue, “On a certain kind of generalized number – theoretical Möbius function,” *Math. Sci*., **vol**. 25, **no**. 2, pp. 72-77, 2000.

[3] E. D. Cashwell and C. J. Everett, “The ring of number-theoretic functions,” *Pacific J. Math*., **vol**. 9, pp. 975-985, 1959.

[4] L. E. Dickson, *A generalization of Fermat’s Theorem in The Collected Mathematical Papers* **vol.** 11. New York: Chelsea Publishing Company, 1975.

[5] P. Haukkanen, “A note on specially multiplicative arithmetic function,” *Fibonacci Quart*., **vol**. 26, pp. 325-327, 1988.

[6] P. Haukkanen, “On generalized Landau identities,” *Portugaliae Mathematica*, **vol.** 52, Fasc. 1, pp. 29-38, 1995.

[7] P. Haukkanen, “Some characterizations of totients,” *Int. J. Math. Math. Sci*., **vol**. 19, **no**. 2, pp. 209-217, 1996.

[8] P. Haukkanen, “On the real powers of completely multiplicative functions,” *Nieuw Arch. Wisk*., **vol**. (4)15, **no.** 1-2, pp. 73-77, 1997.

[9] P. Haukkanen, “A further combinatorial Number-Theoretic extension of Euler’s Totient,” *J. Math. Res. Expo.*, **vol**. 17, **no**. 4, pp. 519-523, 1997.

[10] P. Haukkanen and J. Wang, “Euler’s totient function and Ramanujan’s sum in a poset-theoretic setting,” *Discussiones Mathematicae Algebra and Stochastic Methods,* vol. 17, pp. 79-87, 1997.

[11] V. Laohakosol, N. Pabhapote and N. Wechwiriyakul, “Characterizing completely multiplicative functions by generalized Möbius functions,” *Int. J. Math. Math. Sci*., vol. 29, no. 11. pp. 633-639, 2002.

[12] V. Laohakosol and N. Pabhapote, “Completely multiplicative functions arising from simple operations,” *Int. J. Math. Math. Sci*., 2004, no. 9, pp. 431-441, 2004.

[13] V. Laohakosol and N. Pabhapote, “Properties of rational arithmetic functions,” *Int. J. Math. Math. Sci*., 2005, no. 24, pp. 3997-4017, 2005.

[14] V. Laohakosol, P. Ruengsinsub and N. Pabhapote, “Ramanujan sums via generalized Möbius functions and applications,” *Int. J. Math. Math. Sci*., 2006, pp. 1-34, 2006.

[15] P. J. McCarthy, “On an arithmetic function,” *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 63, pp. 228-230, 1959.

[16] N. Pabhapote, V. Laohakosol and P. Ruengsinsub, “Two aspects of generalized Möbius functions: Landau, Brauer-Rademaher identies and dependence,” *Int. J. Pure App. Math*., vol. 25, no. 2, pp. 225-243, 2005.

[17] D. Rearick, “Operators on algebra of arithmetic functions,” *Duke Math. J*., vol. 35, pp. 761-766, 1968.

[18] D. Rearick, “The trigonometry of numbers,” *Duke Math. J*., vol. 35, pp. 767-776, 1968.

[19] H. N. Shapiro, *Introduction to the Theory of Numbers, Pure and Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

[20] R. Sivaramakrishnan, “Multiplicative functions and its Dirichlet inverse,” *Amer. Math. Monthly*, vol. 77, pp. 772-777, 1970.

[21] J. M. Souriau, “Generalisation de certaines formulas arithmetiques d’inversion Applications,” *Revue Sci*. vol. 82, pp. 204-211, 1744.

[22] L. Toth, “A note on a generalization of Euler’s ϕ function,” *Elem. Math.*, vol. 26, pp. 136-138, 1971.

[23] L. Toth, “Asymptotic formulae concerning the product and the quotient of the arithmetical functions σ_s and ϕ_s,” Tatra Mt. Math. Publ., vol. 11, pp. 167-175, 1997.

[24] J. Wang and L. C. Hsu, “On certain generalized Euler-type totients and Möbius-type functions,” Dalian University of Technology, China, preprint.