อเมริกันออปชัน
American Option

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมพร ปิ่นโภชา
สาขาวิชาวิศวกรรมการเงิน
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

Assistant Professor Dr. Somporn Punpocha
Department of Financial Engineering
School of Science and Technology
University of the Thai Chamber of Commerce
E-mail: somporn__punpocha@yahoo.com

บทคัดย่อ

คุณสมบัติของการใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุของอเมริกันออปชันทำให้การประมาณราคาของออปชันไม่ง่ายเหมือนกับการหาราคาออปชันแบบยุโรปเปียนที่สามารถใช้สูตรแบล็คโชลส์ ปัญหาของการหาราคาของอเมริกันออปชันเป็นปัญหาขอบเขตอิสระ (Free-boundary Problem) ที่เกิดจากใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุของออปชัน จากเอกสารอ้างอิง พบว่า การหาราคาของอเมริกันออปชันและขอบเขตของราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม มีการศึกษาอย่างมากทั้งด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข และวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ ในบทความนี้ได้นำเสนอโครงสร้างของอเมริกันออปชันในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของสมการแบล็คโชลส์ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตอิสระเพื่อทำให้เกิดความเข้าใจถึงโครงสร้างพื้นฐานของการหาราคาออปชัน และความซับซ้อนของปัญหาขอบเขตอิสระที่มีผลต่อการคำนวณหาราคาออปชันที่มีค่าขอบอิสระ (Free-boundary Values) ที่ถูกใช้เป็นราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม (Optimal Exercise Price) พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างกราฟของความสัมพันธ์ของราคาออปชันกับราคาสินทรัพย์ในช่วงเวลาของอายุสัญญาที่แตกต่างกัน และกราฟขอบเขตของราคาใช้สิทธิที่เหมาะสมของอเมริกันพุทออปชันทั้งที่ได้จากศึกษาด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขและวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์

คำสำคัญ: ราคาของอเมริกันออปชัน ขอบเขตอิสระ สูตรแบล็คโชลส์ ราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม

Abstract

The early exercise of American property option before the expiry date makes the calculation of the option more difficult than the European option of pricing by the Black-Scholes Formula. The problem of an American option pricing is a free boundary value arising from an early exercise feature. Based on literature, the pricing of American option and the optimal exercise boundary have been investigated extensively both in numerical methods and analytical approximations. This article presents the structure of American option in the partial differential equation that satisfies the Black-Scholes model with free boundary conditions. To give a basic understanding of the structure of option pricing and the complication of the free boundary problem, which affects the calculation of the option, graphs of American call and put option versus underlying assets with various expiry dates are shown where the boundaries used are the optimal exercise prices. They introduce the optimal exercise boundary of American put option both of the numerical method approach and analytical approximation approach when the time is close to expiry.

Keyword : American Option Pricing, Free - Boundary, Black – Scholes Formula, Optimal Exercise Price

บทนำ

ในโลกธุรกิจการเงิน การลงทุน มีเครื่องมือทางการเงินที่ใช้ป้องกันความเสี่ยงจากการผันผวนของราคาสินทรัพย์ในอนาคตในรูปของออปชันอยู่หลายรูปแบบ ซึ่งออปชันเป็นตราสารสิทธิที่ให้สิทธิกับผู้ถือสัญญาในการซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงด้วยราคาที่ตกลงกัน ณ เวลาที่กำหนดในอนาคต ซึ่งราคาที่ที่ตกลงกันที่จะซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิง ณ วันหมดอายุสัญญา (Expiry Date) เราเรียก ราคาใช้สิทธิ (Strike Price) ถ้าออปชันมีอายุถึงช่วงเวลาที่กำหนดการใช้สิทธิ ผู้ถือออปชันอาจจะใช้สิทธิ (Exercise) หรือปล่อยให้ออปชันหมดอายุไปโดยไม่ใช้สิทธิก็ได้ ออปชันที่ใช้สิทธิในการซื้อสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต เรียกว่า คอลออปชัน (Call Option) และ ออปชันที่ใช้สิทธิในการขายสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต เรียกว่า พุทออปชัน (Put Option) ออปชันแบ่งได้เป็น 2 ประเภทตามข้อจำกัดของการใช้สิทธิ ได้แก่ ยูโรเปียนออปชัน (European Option) และอเมริกันออปชัน (American Option) ซึ่งยุโรเปียนออปชันเป็นออปชันที่สามารถใช้สิทธิ ณ วันหมดอายุของตราสารสิทธิ ขณะที่อเมริกันออปชันเป็นออปชันที่ผู้ถือสัญญาสามารถใช้สิทธิ ณ วันหมดอายุหรือก่อนวันหมดอายุ ซึ่งจะเห็นได้ว่าออปชันแบบอเมริกันเป็นออปชันที่มีความยืดหยุ่นให้กับนักลงทุนมากกว่าออปชันแบบยุโรป ดังนั้น จึงเป็นเหตุผลที่ทำให้ออปชันแบบอเมริกันเป็นที่นิยมใช้เป็นเครื่องมือในการป้องกันความเสี่ยงกันอย่างแพร่หลายในต่างประเทศ

แต่ในประเทศไทยการซื้อขายตราสารสิทธิ์ในรูปของออปชันในตลาดตราสารอนุพันธ์ยังมีรูปแบบการซื้อขายไม่มากนัก และอีกทั้งการคำนวณราคาของอเมริกันออปชันนั้นเป็นเรื่องซับซ้อนและไม่มีรูปแบบของสูตรการคำนวณที่แน่นอนเหมือนกับการคำนวณหาราคาของออปชันแบบยุโรปเปียน ที่สามารถใช้สูตรแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes Formula) ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2 ประเมินราคาของออปชันทั้งคอลและพุทออปชัน (สมพร ปั่นโภชา, 2556: 198) ในการศึกษาเรื่องการประมาณราคาของออปชันแบบอเมริกันจะต้องมีความเข้าใจถึงโครงสร้างของออปชันและความซับซ้อนของขอบเขตอิสระที่มีผลต่อราคาของอเมริกันออปชัน ทำให้การคำนวณหาราคาของอเมริกันออปชันจำเป็นต้องใช้ความเข้าใจในปัญหาขอบเขตอิสระในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และการใช้การโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการประมวลผลหาค่าประมาณราคาออปชัน ซึ่งในบทความนี้จะนำเสนอโครงสร้างของอเมริกันออปชัน ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของสมการแบล็คโชลส์ที่มีเงื่อนไขเป็นค่าขอบเขตอิสระ พร้อมทั้งแสดงกราฟของความสัมพันธ์ของราคาออปชันกับราคาสินทรัพย์ในช่วงเวลาของอายุสัญญาที่แตกต่างกัน ตลอดจนแสดงความสัมพันธ์ของราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม (Optimal Exercise Price) สำหรับอเมริกันออปชันที่มีผลต่อการประเมินราคาของออปชัน

เป็นเวลากว่า 30 ปี ที่มีความพยายามในการศึกษาวิธีการประมาณค่าราคาออปชันแบบอเมริกันให้สิทธิกับผู้ถือออปชันใช้สิทธิในช่วงใดก็ได้ก่อนถึงวันหมดอายุสัญญา ซึ่งสามารถแบ่งการศึกษาวิจัยออกเป็น 2 แนวทางคือ แนวทางที่ 1 ศึกษาด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ (Analytic Approximations) และ แนวทางที่ 2 ศึกษาด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Methods) ในแนวทางแรกมีงานวิจัย เช่น Geske and Johnson (1984) ได้คำนวณราคาอเมริกันออปชันในเทอมของอนุกรมของฟังก์ชันออปชันร่วมหลายตัว (Compound-option Function) MacMillan (1986) ได้ใช้วิธีประมาณค่ากำลังสอง (Quadratic Approximation Method) ในการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และ Ju and Zhong (1999: 31) ได้นำเสนอความมีประสิทธิภาพและความถูกต้องแม่นยำของสูตรที่ได้จากวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ในการประมาณค่าราคาของอเมริกันออปชันที่มีการจ่ายเงินปันผล เหล่านี้เป็นต้น ส่วนแนวทางที่ 2 มีการศึกษาวิจัยมีวิธีการที่นิยมใช้ส่วนใหญ่คือ วิธีจำลองโครงข่าย (Lattice Method) วิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) และ วิธีมอลติคาโล (Monte Carlo) ยกตัวอย่างเช่น Schwartz (1977) ได้คำนวณหาอเมริกันออปชันโดยวิธีการผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) เป็นครั้งแรก Cox, Ross, and Rubinstein (1979) เป็นคนแรกที่นำเสนอวิธีแบบจำลองทวินาม (Binomial Method) ในการประมาณราคาของอเมริกันออปชัน และ Grant, Vora, and Weeks (1996) ได้ใช้วิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation Method) ในการประมาณค่า จากงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ในปัจจุบันมีบทความวิจัยมากมายที่พยายามจะใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อหาสูตรการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์และเปรียบเทียบกับการคำนวณหาเชิงตัวเลข เพื่อให้ได้วิธีการที่สามารถคำนวณได้ง่าย สะดวก รวดเร็ว ความแม่นยำ และมีประสิทธิภาพมากขึ้น (Horng and Tien, 2013) ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอเมริกันออปชันในปัญหาขอบเขตอิสระ (Free-boundary Problem) ของอสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2 พร้อมทั้งยกตัวอย่างการคำนวณเชิง

ตัวเลขของราคาของคอลและพุทออปชันที่มีอายุ T ราคาใช้สิทธิ ณ วันหมดอายุ E และ ค่าความผันผวน σ ด้วยวิธีผลต่างอันตะกระชับอันดับที่ 1 (Compact Finite Difference Method) ของ Zhao, Davison, and Corless (2007: 306) ในช่วงเวลาหมดอายุที่แตกต่างกัน และแสดงตัวอย่างกราฟที่แสดงขอบเขตของราคาใช้สิทธิที่เหมาะสมที่ขึ้นอยู่กับเวลา t ในช่วง $0 \le t \le T$ ซึ่งจะมีผลต่อราคาของพุทออปชันด้วยวิธีการประมาณเชิงวิเคราะห์แบบใหม่ของ Zhu. S.P. (New Analytical Approximation) และแสดงเปรียบเทียบการประมาณที่ได้จากวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข และวิธีการประมาณค่าเชิงวิธีวิเคราะห์ ซึ่งความเข้าใจในโครงสร้างของอเมริกันพุทออปชันจะเป็นความรู้พื้นฐานที่จะนำไปสู่ความเข้าใจของการแก้ปัญหาขอบเขตอิสระในออปชันรูปแบบอื่น ๆ ที่มีความซับซ้อนในเงื่อนไขของการใช้สิทธิ (Exercise) ที่ไม่กำหนดเวลาที่แน่นอนในช่วงอายุของออปชัน

อเมริกันออปชัน

เนื่องจากอเมริกันออปชันให้สิทธิกับผู้ซื้อออปชันว่า สามารถใช้สิทธิในช่วงเวลาใดก็ได้ก่อนถึงวันหมดอายุของสัญญา ทำให้เกิดปัญหาค่าขอบอิสระ (Free-boundary) ดังนั้น ราคาของอเมริกันออปชันจึงมีราคาสูงกว่าราคาของออปชันแบบยุโรป ซึ่งราคาของออปชันแบบอเมริกันออปชันเขียนในรูปของอสมการเป็น (Wilmott, Dewynne, and Howison, 1997)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-D)s\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV \quad \le \quad 0 \qquad (1)$$

โดยที่ $s(t)$ ราคาสินทรัพย์อ้างอิง ณ เวลา t ใด ๆ

σ เป็นค่าความผันผวน(Volatility) ของราคาสินทรัพย์ที่วัดด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนของสินทรัพย์

r เป็นอัตราผลตอบแทนที่ปราศจากความเสี่ยง

D เป็นอัตราการจ่ายเงินปันผล (dividend) ของสินทรัพย์อ้างอิง ∋

และ $V(s,t)$ ราคาของออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ s และ t ซึ่งแทนด้วย $C(s,t)$ สำหรับคอลออปชัน และ $P(s,t)$ สำหรับพุทออปชัน

ให้ $S_f(t)$ เป็นราคาใช้สิทธิที่เหมาะสมของ S ณ เวลา t ใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบอิสระ ณ วันหมดอายุ T และในแต่ละเวลา t ใด ๆ $S_f(t)$ จะแบ่งการพิจารณา $s(t)$ ออกเป็น 2 ช่วงคือ ช่วง $S \in [0, S_f(t))$ และ $S \in [S_f(t), +\infty]$

กรณีคอลออปชันช่วงของการใช้สิทธิที่เหมาะสม (Optimal exercise) คือ ช่วง $S \in [S_f(t), +\infty)$ ซึ่งมี

$$C = S - E \text{ และ } \qquad \frac{\partial C}{\partial t} + (r-D)s\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} - rC \quad < \quad 0 \qquad (2)$$

และในช่วง $S \in [0, S_f(t))$ ที่ไม่ควรใช้สิทธิ

ซึ่งมี $C > S - E$ และเป็นไปตามสมการแบล็คโชลส์ คือ

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r-D)s\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} - rC = 0 \tag{3}$$

และมีเงื่อนไขค่าขอบอิสระของราคาออปชันที่เวลา t ใด ๆ เป็น

และ
$$\left.\begin{aligned} C(S_f(t),t) &= S_f(t) - E \\ \frac{\partial}{\partial S}C(S_f(t),t) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

และมีเงื่อนไขค่าขอบตามสมการ

$$C(0,t) = 0 \text{ และ } C(s,t) \sim s \text{ ขณะที่ } s \to \infty \tag{5}$$

และ

$$S_f(T) = \max\left(E, \frac{rE}{D}\right) \tag{6}$$

กรณีอเมริกันพุทออปชัน

ช่วงของการใช้สิทธิที่เหมาะสม คือ ช่วง $S \in [0, S_f(t))$

มี $P = S - E$ และ
$$\frac{\partial P}{\partial t} + (r-D)s\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} - rP < 0 \tag{7}$$

และในช่วง $S \in [S_f(t), +\infty)$ ที่ไม่ควรใช้สิทธิ

มี $P > S - E$ และเป็นไปตามสมการแบล็คโชลส์ คือ

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (r-D)s\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} - rP = 0 \tag{8}$$

มีเงื่อนไขค่าขอบอิสระของราคาออปชันที่เวลา t ใด ๆ เป็น

และ
$$\left.\begin{aligned} P(S_f(t),t) &= E - S_f(t) \\ \frac{\partial}{\partial S}P(S_f(t),t) &= -1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

และเงื่อนไขค่าขอบตามสมการ

$$V(0,t) = Ee^{-r(T-t)} \text{ และ } V(s,t) \sim 0 \text{ ขณะที่ } s \to \infty \tag{10}$$

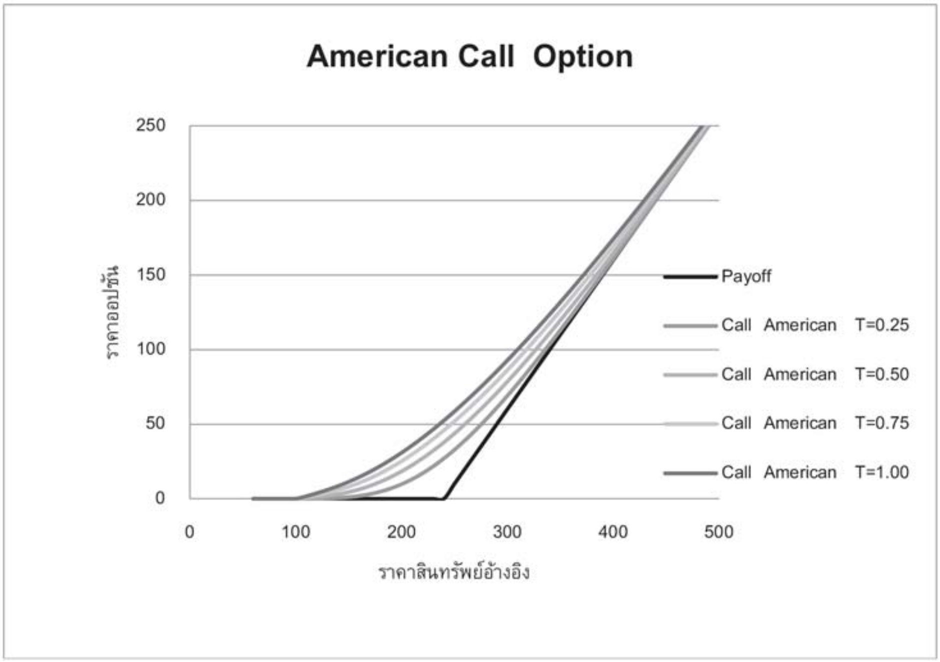
จากสมการ (1) ถึง สมการ (10) ราคาของอเมริกันออปชันเป็นไปตามสมการต่อไปนี้
กรณีคอลออปชันเป็น

$$\mathrm{V(S,t)} = \begin{cases} \max(S-E,0), & S \in [S_f(t), +\infty) \\ V(S,t) \quad , & S \in [0, S_f(t)) \end{cases} \tag{11}$$

และกรณีพุทออปชันเป็น

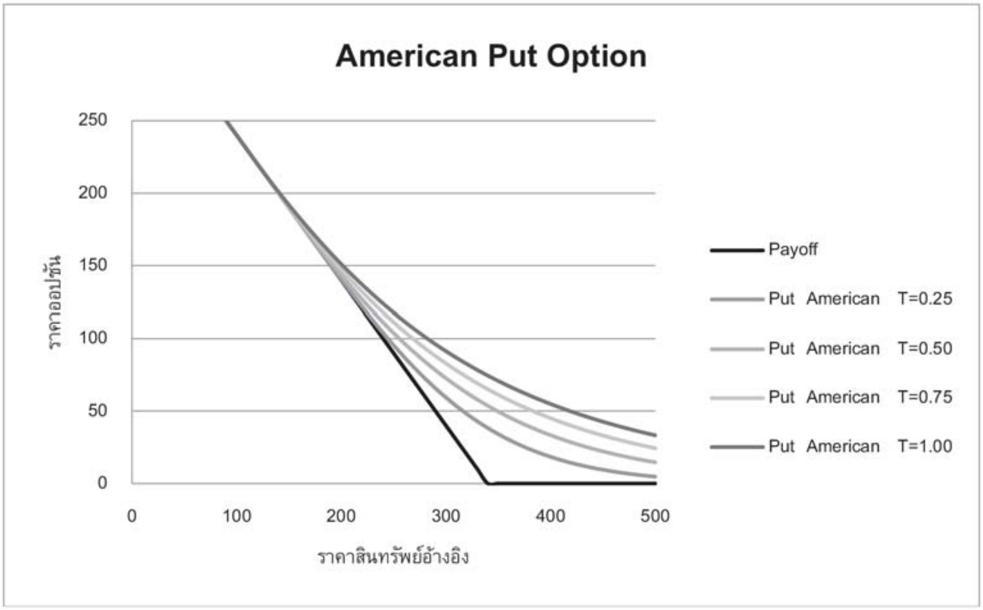
$$\mathrm{V(S,t)} = \begin{cases} V(S,t) \quad , & S \in [S_f(t), +\infty) \\ \max(E-S,0), & S \in [0, S_f(t)) \end{cases} \tag{12}$$

ในภาพที่ 1 และ ภาพที่ 2 เป็นการประมาณราคาคอลและพุทของอเมริกันออปชันด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Zhao, Davison, and Corless, 2007: 306) จะสังเกตเห็นว่าที่ระยะเวลาหมดอายุ T ที่แตกต่างกัน ราคาของอเมริกันออปชันที่มีวันหมดอายุคงเหลือน้อยกว่าจะมีราคาออปชันที่ถูกกว่าออปชันที่มีอายุคงเหลือมากกว่า ณ ที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงเดียวกัน



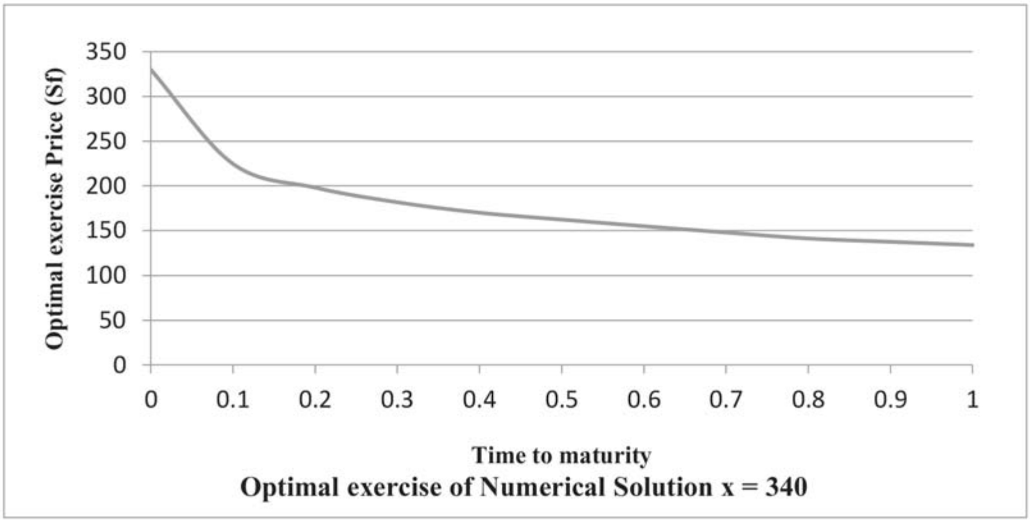
ภาพที่ 1 ราคาอเมริกันคอลออปชันที่เป็นฟังก์ชันของราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่วันหมดอายุ (T) ที่ต่างกัน สำหรับ $\mathrm{E} = 240$, $r = 3.14\%$ และ $\sigma = 0.57$
(นาวิน เรืองธนานุรักษ์ และ สมพร ปิ่นโภชา, 2556: 189)

จากภาพที่ 1 ณ $S = 240$ ราคาคอลออปชันที่มีอายุ $T = 1$ ปี มีราคาสูงกว่าออปชันที่มีอายุ $T = 0.25$ ปี และในทำนองเดียวกัน สำหรับภาพที่ 2 ณ $S = 340$ ราคาพุทออปชันที่มีอายุ $T = 1$ ปี มีราคาสูงกว่าออปชันที่มีอายุ $T = 0.25$ ปี เช่นกัน



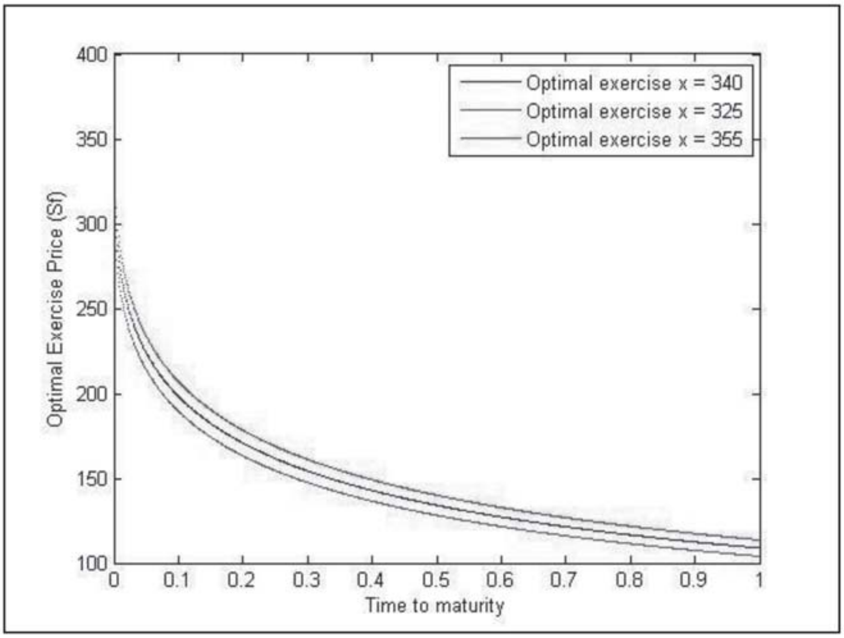
ภาพที่ 2 ราคาอเมริกันคอลออปชันที่เป็นฟังก์ชันของราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่วันหมดอายุ (T) ที่ต่างกัน สำหรับ $\mathrm{E} = 240$, $r = 3.14\%$ และ $\sigma = 0.57$ (นาวิน เรืองธนานุรักษ์ และ สมพร ปั่นโภชา, 2556: 189)

เนื่องจากการคำนวณหาราคาอเมริกันออปชันจะต้องทราบราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ ก่อน ซึ่ง $S_f(t)$ ที่ได้จะต้องสอดคล้องกับค่าขอบตามสมการ (4) สำหรับคอลออปชัน และตามสมการ (9) สำหรับพุทออปชัน และในการหาค่า $S_f(t)$ จะต้องกระทำในแต่ละช่วงเวลา $0 \leq t \leq T$ ซึ่งจากวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขของ Zhao, Davison, and Corless (2007: 306) จะได้ราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ สำหรับอเมริกันพุทที่เวลา 0.1 ถึง 1 ปี (Zhu, 2006: 1141) ดังแสดงในภาพที่ 3 พบว่า $S_f(t)$ มีค่าลดลงเมื่อออปชันใกล้ถึงวันหมดอายุ



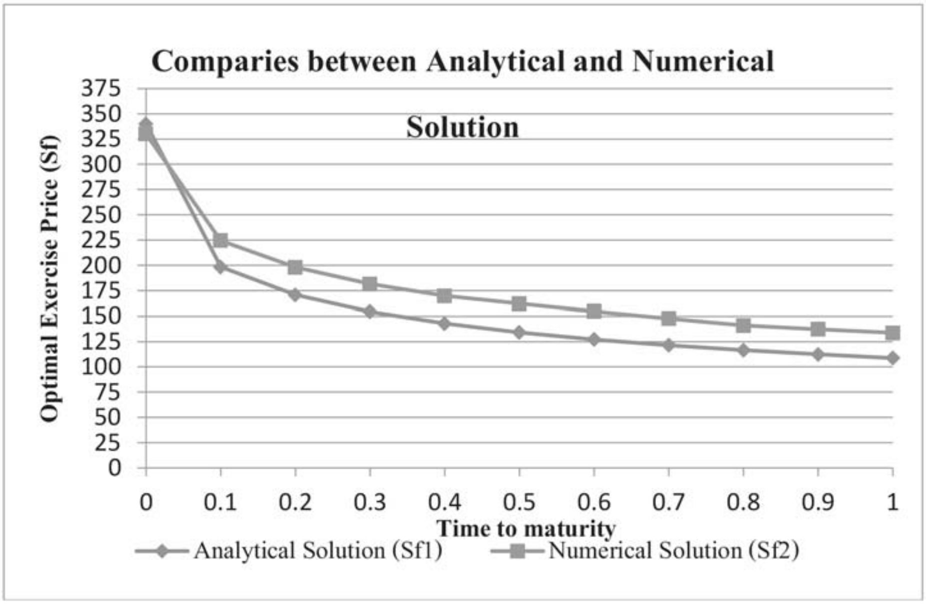
ภาพที่ 3 ราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ ของอเมริกันพุท เมื่อ $\mathrm{E} = 240$, $r = 3.14\%$, $T = 1$ และ $\sigma = 0.57$ สำหรับเวลาตั้งแต่ 0.1 ปี – 1 ปี (ศลิษา หัสดิเสวี และ สมพร ปั่นโภชา, 2556: 211)

เมื่อพิจารณาราคาใช้สิทธิ ณ วันหมดอายุ E ที่แตกต่างกัน ด้วยวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ Zhu. S.P. (2006: 1141) พบว่า ณ อายุคงเหลือก่อนถึงวันหมดอายุ ออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ E ที่มากกว่า จะมีราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ สูงกว่าออปชันที่มีราคาใช้สิทธิต่ำกว่า ดังแสดงในภาพที่ 4



ภาพที่ 4 ราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ เมื่อ $r = 3.14\%$ และ $\sigma = 0.57$ สำหรับอายุคงเหลือของออปชัน $T - t$ ตั้งแต่ 0.1 ปี – 1 ปี สำหรับ $\mathrm{E} = 325, 340, 355$ ตามลำดับ (ศลิษา หัสดิเสวี และ สมพร ปั่นโภชา, 2556: 211)

เมื่อเปรียบเทียบกับการทดสอบหาราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ ของอเมริกันพุทออปชันด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข และวิธีการประมาณค่าจากสูตรการคำนวณเชิงวิเคราะห์สำหรับข้อมูลชุดเดียวกัน พบว่า ทั้งสองวิธีการมีแนวโน้มของ $S_f(t)$ ไปในทางเดียวกัน ดังภาพที่ 5 แต่ผลของการคำนวณด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข จะได้ราคาใช้สิทธิที่เหมาะสมสูงกว่าวิธีการคำนวณโดยใช้สูตรการคำนวณเชิงวิเคราะห์



ภาพที่ 5 เปรียบเทียบ $S_f(t)$ ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข กับสูตรการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ของอเมริกันพุทออปชัน (ศลิษา หัสดิเสวี และ สมพร ปั่นโภชา, 2556: 211)

อย่างไรก็ตาม Zhu. S.P. (2006) ได้ศึกษาวิธีการประมาณเชิงวิเคราะห์ (New Analytical Approximate) ของอเมริกันออปชันด้วยวิธีการแปลงลาปลาส พบว่า การประมาณค่าด้วยวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ให้ความแม่นยำมากกว่าวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข

บทสรุป

มีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการหาราคาของอเมริกันออปชันเป็นเวลาช้านานด้วยวิธีทั้งการคำนวณเชิงตัวเลขและการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์หลังจากที่มีการค้นพบแบบจำลองของแบล็คโชลส์ที่สามารถคำนวณหาราคาของยุโรปเปียนออปชันในรูปสูตรสำเร็จทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งพุทออปชันและคอลออปชัน แต่สำหรับออปชันในรูปแบบอเมริกันที่ให้สิทธิกับผู้ถือออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้ ณ วันหมดอายุหรือก่อนที่จะถึงวันหมดอายุ เป็นปัญหาที่ซับซ้อนและมีความยุ่งยากในการแก้ปัญหา เนื่องจากไม่ทราบเวลาใดเป็นเวลาที่เหมาะที่ควรใช้สิทธิ และสินทรัพย์ควรจะอยู่ที่ราคาเท่าไร เพื่อใช้ในการหาราคาของออปชัน ซึ่งในการประเมินราคาของออปชัน ผู้ขายสัญญาจะต้องทราบราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ ที่มี

เงื่อนไขขอบอิสระ (Free-boundary Conditions) ที่เป็นไปตามสมการ (4) กรณีคอลออปชัน และสมการ (6) สำหรับกรณีพุทออปชัน แต่เนื่องจาก $S_f(t)$ เป็นตัวแปรที่มีผลต่อการคำนวณราคาออปชันซึ่งจะต้องหาทุก ๆ ช่วงเวลาตลอดช่วงอายุของออปชัน ทำให้การคำนวณหาราคามีความซับซ้อน มีบทความวิจัยมากมายที่พยายามหาค่า $S_f(t)$ ด้วยวิธีการต่าง ๆ โดยใช้พื้นฐานความรู้ในคณิตศาสตร์ขั้นสูง ในการคำนวณหา $V(S, t)$ ของอเมริกันออปชันได้แบ่งการพิจาณา ราคา $S_f(t)$ ออกเป็น 2 ช่วง คือ ช่วง $S \in [0, S_f(t))$ และ $S \in [S_f(t), +\infty)$ สำหรับราคาคอลออปชันบนช่วง $S \in [0, S_f(t))$ เป็นช่วงเวลาที่ไม่ควรใช้สิทธิเนื่องจาก $C > S - E$ ส่วนช่วงเวลาที่ $S \in [S_f(t), +\infty)$ เป็นช่วงเวลาที่เหมาะสมที่จะใช้สิทธิเนื่องจาก $C = S - E$ ส่วนพุทออปชันพิจารณาในทางตรงกันข้าม ซึ่งได้กราฟของ $C(S, t)$ และ $P(S, t)$ ที่มีอายุของออปชันต่างกันดังภาพที่ 1 และ ภาพที่ 2 และราคาใช้สิทธิที่เหมาะสม $S_f(t)$ ณ ช่วงเวลา $0 \le t \le T$ ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข ด้วยวิธีของ Zhao, Davison, and Corless (2007: 306) แสดงในภาพที่ 3 และจากวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ด้วยวิธีของ Zhu. S.P. ได้ขอบเขต (Boundary) ของ $S_f(t)$ ในภาพที่ 4 ที่ ราคาใช้สิทธิ ณ วันหมดอายุ E ต่างกันสำหรับออปชันที่มีเงื่อนไขเหมือนกัน พบว่า ที่ราคาใช้สิทธิ E ที่สูงกว่าจะได้ ค่า $S_f(t)$ สูงกว่าด้วย และเมื่อนำผลการคำนวณด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข และวิธีการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ ในข้อมูลชุดเดียวกันพบเส้นขอบเขตของ $S_f(t)$ ได้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกัน จากความเข้าใจขั้นพื้นฐานในการประมาณค่าเชิงวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ และการคำนวณเชิงตัวเลขของปัญหาขอบเขตอิสระของอเมริกันออปชัน จะทำให้ผู้ศึกษาวิจัยสามารถนำไปประยุกต์ไปใช้ในการศึกษาค้นคว้า และเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหาขอบเขตอิสระในรูปแบบใหม่ ๆ ได้ ซึ่งในปัจจุบันพบเห็นได้ในหลาย ๆ บทความวิจัยที่ศึกษากันอย่างแพร่หลาย เช่น อเมริกันออปชันที่เป็นแบบแบลิเออร์ออปชัน (American Barrier Options) ในกรณี อิน แอน เอาท์ (In and Out) หรือน็อค แอน ดาวน์ (Knock and Down) เป็นต้น (Haug, 2001: 355)

บรรณานุกรม

American Options [On-line]. 2013. Available: htpp://www.global-derivatives.com/index.php/component/content/article/13-options

Capinski, M., and Zastawniak, T. 2003. **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**. London: Sringer.

Cox, J., Ross, J.S. and Rubinstein, M. 1979. “Option Pricing – A Simplified Approach.” **Journal of Financial Economics** 7, 3: 229-263.

Geske, R. and Johnson, H.E. 1984. “The American Put Option Values Analytically.” **The Journal of Finance** 39, 5: 1511-1524.

Grant, D., Vora, G., and Weeks, D. 1996. “Simulation and the Early Exercise Option Problem.” **Journal of Financial Engineering** 5, 3: 211-227.

Haug, E.G. 2001. “Closed form Valuation of American Barrier Options.” **International Journal of Theoretical and Applied Finance** 4, 2: 355-359.

Husadisawee, Salisa, and Punpocha, Somporn. 2013. “Boundary of Optimal Exercise Price for American Put Option.” In **Proceeding of Graduate Research Conference 2013 by Rangsit University, University of the Thai Chamber of Commerce and National Defence Studies Institute Royal Thai Armed Force**, pp. 206-212. Bangkok: Rangsit University. (in Thai).

ศลิษา หัสดิเสวี และ สมพร ปั่นโภชา. 2556. “ขอบของราคาใช้สิทธิที่เหมาะสมสำหรับอเมริกันพุทออปชัน.” ใน **เอกสารการประชุมนำเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา ประจำปีการศึกษา 2556 ของมหาวิทยาลัยรังสิต มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย และสถาบันวิชาการป้องกันประเทศ**, หน้า 206-212. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยรังสิต.

Horng, T.L., and Tien, C.Y. 2013. “A Simple Numerical Approach for Sloving American Option Problems.” In **Proceeding of the World Congress on Engineering 2013,** pp. 342-347. London: U.K.

Ju, N., and Zhong, R. 1999. “An Approximate Formula for Pricing American Options.” **The Journal of Derivatives** 7, 2: 31-40.

MacMillan, L. 1986. “Analytical Approximation for the American Put Option.” **Advances in Futures and Option Research** Vol 1: 119-139.

Punpocha, Somporn. 2013. “Black-Scholes Model : Option pricing formula.” **University of the Thai Chamber of Commerce Journal** 33, 4: 194-206. (in Thai).

สมพร ปั่นโภชา. 2556. “แบบจำลองแบล็คโชลส์: สูตรการประมาณค่าออปชัน.” **วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย** 33, 4: 194-206.

Reungthananurugs, Nawin, and Punpocha, Somporn. 2013. “Compact finite Difference Method for American Put Option.” In **Proceeding of Graduate Research Conference 2013 by Rangsit University University of the Thai Chamber of Commerce and National Defence Studies Institute Royal Thai Armed Force**, pp. 189-196. Bangkok: Rangsit University. (in Thai).

นาวิน เรืองธนานุรักษ์ และ สมพร ปั่นโภชา. 2554. “วิธีการผลต่างอันตะกระชับสำหรับอเมริกันพุทออปชัน.” ใน **เอกสารการประชุมนำเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา ประจำปีการศึกษา 2556 ของมหาวิทยาลัยรังสิต มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย และสถาบันวิชาการป้องกันประเทศ**, หน้า 189-195. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยรังสิต.

Schwartz, E. 1977. “The Valuation of Warrants, Implementing a New Approach.” **Journal of Financial Economics** 4, 1: 79-93.

Wilmott, P., Dewynne, J., and Howison, S. 1997. **The Mathematics of Financial Derivatives**. Oxford: Cambridge University Press.

Zhao, J., Davison, M., and Corless, R.M. 2007. “Compact F inite Difference Method for American Option Pricing.“ **Journal of Computational and Applied Mathematics** 206, 1: 306-321.

Zhu. S.P. 2006. “A new Analytical-Approximation Formula for the Option Exercise Boundary of American Put Option.” **International Journal of Theoretical and Applied Finance** 9, 7: 1141-1177.

Assistant Professor Dr. Somporn Punpocha received her B.Sc. in Physics from Silapakorn University and M.Sc. in Applied Mathematics and Ph.D. in Mathematics from Mahidol University. She is currently working in the Financial Engineering Department at School of Science and Technology, UTCC. Her research focuses on financial mathematics and computation.